

MODÉLISATION QUADRATIQUE

I Fonctions polynômes du second degré

Définition 1

Une **fonction polynôme du second degré** est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui peut s'écrire :

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

avec a, b, c réels et $a \neq 0$.

Sa courbe représentative est une **parabole**.

Exemple 2

Parmi les expressions suivantes :

$$x^2 - 7x + 12, \quad 4x^2, \quad 2x + 1, \quad 6x^3 + 4x + 2,$$

les fonctions polynômes du second degré sont $x \mapsto x^2 - 7x + 12$ et $x \mapsto 4x^2$.

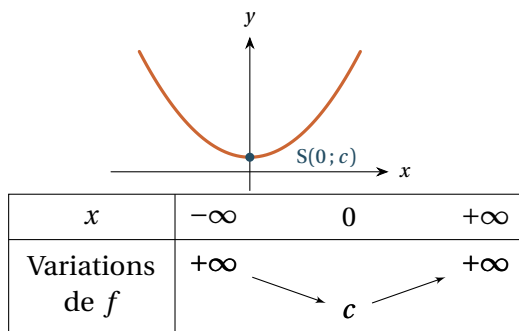
I.1 Premières paraboles

Propriété 3

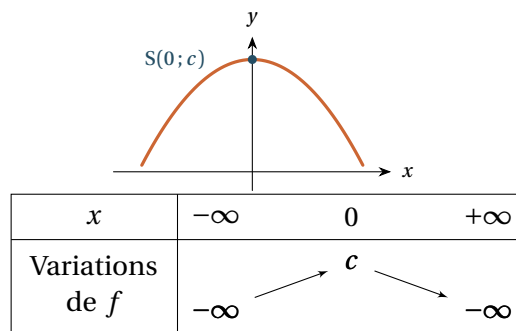
Soit $f(x) = ax^2 + c$, avec $a \neq 0$.

- La parabole admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.
- Son sommet est le point $S(0; c)$: la fonction admet un extremum c , atteint pour $x = 0$.

Si $a > 0$, la parabole est tournée vers le haut.



Si $a < 0$, la parabole est tournée vers le bas.



Exercice 4 : Comprendre le rôle de a et c

On considère les fonctions p et q définies sur $\mathbb{R}$ par

$$p(x) = 2x^2 - 3 \quad \text{et} \quad q(x) = -0,5x^2 + 2.$$

1. Pour chaque fonction, donner les coordonnées du sommet, l'axe de symétrie, l'orientation de la parabole et la valeur de son extremum.

Pour p , le sommet est $S_p(0; -3)$, l'axe de symétrie est l'axe des ordonnées et la parabole est tournée vers le haut : son minimum est -3 . Pour q , le sommet est $S_q(0; 2)$, l'axe de symétrie est l'axe des ordonnées et la parabole est tournée vers le bas : son maximum est 2 .

2. Vérifier que le point $A(2; 5)$ appartient à la courbe de p , puis donner sans calcul les coordonnées du point de cette courbe symétrique de A par rapport à l'axe des ordonnées.

$p(2) = 2 \times 2^2 - 3 = 5$, donc A appartient à la courbe de p . Son symétrique est le point $A'(-2; 5)$.

Méthode 5

Pour associer une expression $ax^2 + c$ à une parabole :

- lire $c = f(0)$, l'ordonnée du sommet;
- observer l'orientation de la parabole pour déterminer le signe de a ;
- utiliser un autre point de la courbe pour déterminer la valeur de a .

II Axe de symétrie, sommet et variations**Définition 6**

Le **sommet** d'une parabole est son point le plus bas ou son point le plus haut. La droite verticale passant par le sommet est son **axe de symétrie**.

Méthode 7

Pour déterminer l'axe de symétrie sans formule générale, on peut :

- le lire sur la courbe;
- repérer deux abscisses distinctes x_1 et x_2 telles que $f(x_1) = f(x_2)$: l'axe se situe à mi-distance;
- résoudre une équation $f(x) = k$ bien choisie et utiliser la symétrie des deux solutions.

On calcule ensuite l'ordonnée du sommet avec l'expression de f .

Exemple 8

On considère

$$f(x) = -0,5x^2 + 4x - 3,5.$$

On vérifie que $f(1) = 0$ et $f(7) = 0$. Les points d'abscisses 1 et 7 sont symétriques : l'axe de symétrie a donc pour équation

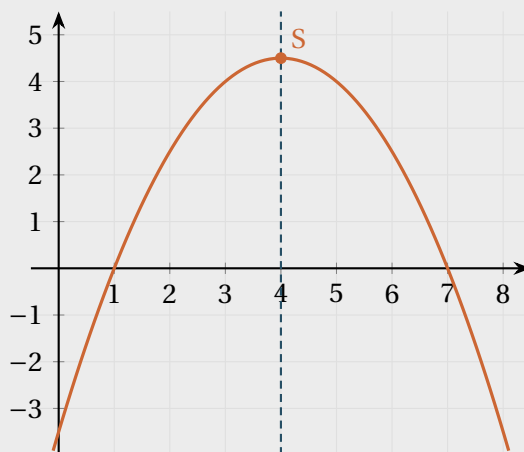
$$x = \frac{1+7}{2} = 4.$$

L'ordonnée du sommet est

$$f(4) = -0,5 \times 4^2 + 4 \times 4 - 3,5 = 4,5.$$

Le sommet est donc le point S de coordonnées $S(4; 4,5)$.

La fonction est croissante sur $] -\infty ; 4]$, puis décroissante sur $[4 ; +\infty[$.

**III Forme factorisée, racines et signe****Définition 9**

Une expression de la forme

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2),$$

avec $a \neq 0$, est une **forme factorisée** d'un polynôme du second degré. Les nombres x_1 et x_2 sont ses **racines**, car $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

Propriété 10

Soit $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, avec $x_1 < x_2$. La fonction f s'annule en x_1 et en x_2 .

- Si $a > 0$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
Signe de $f(x)$	+	0	-	0	+

- Si $a < 0$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
Signe de $f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Ainsi, f est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe opposé entre les deux racines.

Remarque III.1. Lorsque les deux racines sont confondues, la forme factorisée s'écrit $f(x) = a(x - x_0)^2$. Le nombre x_0 est l'unique racine et $f(x)$ est du signe de a pour tout $x \neq x_0$.

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
Signe de $f(x)$	signe de a	0	signe de a

Le signe ne change donc pas de part et d'autre de x_0 .

Exemple 11 : Une racine double

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 3(x + 2)^2.$$

Son unique racine est -2 . Comme $3 > 0$, la fonction g est positive, sauf en -2 où elle s'annule.

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
Signe de $g(x)$	+	0	+

Exemple 12

La fonction précédente s'écrit

$$f(x) = -0,5(x - 1)(x - 7).$$

Ses racines sont 1 et 7 . Comme $-0,5 < 0$, son tableau de signes est :

x	$-\infty$	1	7	$+\infty$	
Signe de $f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Exercice 13 : Comparer les deux situations

On considère les fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ par

$$u(x) = 2(x+3)(x-1) \quad \text{et} \quad v(x) = -0,5(x-2)^2.$$

1. Déterminer les racines de chaque fonction.
2. Compléter les tableaux de signes.

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$	
Signe de $u(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

x	$-\infty$		2	$+\infty$
Signe de $v(x)$		-	0	-

3. En utilisant les tableaux, résoudre les inéquations $u(x) \leq 0$ et $v(x) \geq 0$.

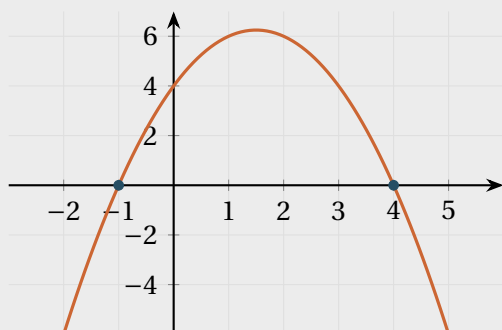
$u(x) \leq 0$ pour $x \in [-3; 1]$. De plus, $v(x) \geq 0$ uniquement pour $x = 2$.

Exercice 14 : Relier la courbe et le signe

On considère la fonction w définie sur $\mathbb{R}$ par

$$w(x) = -(x+1)(x-4),$$

et sa courbe représentative ci-dessous.



1. Lire graphiquement les racines de w .
2. Déterminer graphiquement les réels x pour lesquels $w(x) \geq 0$, puis ceux pour lesquels $w(x) < 0$.
3. Retrouver ces résultats à l'aide de la forme factorisée de $w(x)$ et du signe du coefficient $a = -1$.

Les racines sont -1 et 4 . On a $w(x) \geq 0$ pour $x \in [-1; 4]$, et $w(x) < 0$ pour $x \in]-\infty; -1[\cup]4; +\infty[$. Comme $a < 0$, w est bien négative à l'extérieur des racines et positive entre elles.