

# PHÉNOMÈNES ALÉATOIRES

Dans tout le chapitre,  $P$  désigne une probabilité définie sur un univers  $\Omega$ .

## I Quelques rappels

### I.1 Issues, univers et évènements

#### Définition 1 : Vocabulaire

- Une **issue** est un résultat possible d'une expérience aléatoire.
- L'ensemble de toutes les issues est l'**univers**, noté  $\Omega$ .
- Un **évènement** est un ensemble d'issues, c'est-à-dire une partie de  $\Omega$ .
- L'évènement impossible est  $\emptyset$  et l'évènement certain est  $\Omega$ .

#### Exemple 2 : Lancer d'un dé

On lance un dé cubique équilibré. L'univers est :

$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}.$$

L'évènement  $A$  : « obtenir un nombre pair » est :

$$A = \{2; 4; 6\}.$$

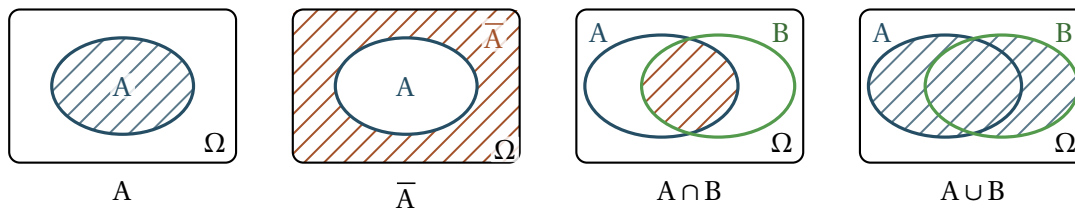


### I.2 Évènement contraire, intersection et réunion

#### Définition 3 : Opérations sur les évènements

Soient  $A$  et  $B$  deux évènements.

- L'évènement contraire  $\bar{A}$  est réalisé lorsque  $A$  ne l'est pas.
- L'intersection  $A \cap B$  est réalisée lorsque  $A$  **et**  $B$  le sont.
- La réunion  $A \cup B$  est réalisée lorsqu'**au moins un** des évènements  $A$  ou  $B$  l'est.



#### Propriété 4 : Formules élémentaires

Pour tous évènements  $A$  et  $B$  :

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \quad \text{et} \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

### I.3 Loi de probabilité et équiprobabilité

#### Définition 5 : Loi de probabilité

Pour un univers fini  $\Omega = \{e_1; e_2; \dots; e_n\}$ , une loi de probabilité associe à chaque issue  $e_i$  un nombre  $p_i$  tel que :

$$0 \leq p_i \leq 1 \quad \text{et} \quad p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1.$$

La probabilité d'un évènement est la somme des probabilités des issues qui le réalisent.

**Propriété 6 : Situation d'équiprobabilité**

Lorsque toutes les issues ont la même probabilité, pour tout événement A :

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues qui réalisent A}}{\text{nombre total d'issues}}.$$

**Exercice 7 : Réactiver les automatismes**

On reprend le lancer d'un dé équilibré et on note A : « obtenir un nombre pair » et B : « obtenir 1 ou 2 ».

1. Déterminer  $\bar{A}$ ,  $A \cap B$  et  $A \cup B$ .  $\bar{A} = \{1; 3; 5\}$ ,  $A \cap B = \{2\}$ ,  $A \cup B = \{1; 2; 4; 6\}$ .

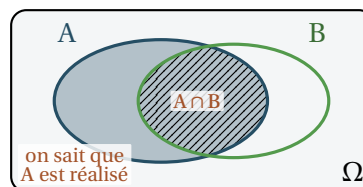
2. Calculer  $P(A)$ ,  $P(\bar{A})$ ,  $P(A \cap B)$  et  $P(A \cup B)$ .  $P(A) = \frac{1}{2}$ ,  $P(\bar{A}) = \frac{1}{2}$ ,  $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ ,  $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$ .

**II Probabilités conditionnelles****II.1 Changer d'univers de référence****Définition 8 : Probabilité conditionnelle**

Soient A et B deux événements tels que  $P(A) > 0$ .

La probabilité que B se réalise **sachant que A est réalisé** est notée  $P_A(B)$  et définie par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$



**Remarque II.1.** Dans  $P_A(B)$ , l'événement placé en indice est le nouvel univers de référence. En général :

$$P_A(B) \neq P_B(A).$$

**Exemple 9 : Un jeu de cartes**

On tire une carte au hasard dans un jeu de 52 cartes.

On note R : « la carte tirée est un roi » et C : « la carte tirée est un cœur ».

1.  $P(C \cap R)$  est la probabilité **de tirer le roi de cœur**.

2.  $P_C(R)$  est la probabilité **de tirer un roi sachant que la carte est un cœur**.

3.  $P_R(C)$  est la probabilité **de tirer un cœur sachant que la carte est un roi**.

4.  $P_C(R) = \frac{1}{13}$  et  $P_R(C) = \frac{1}{4}$ .

**II.2 Calculer dans un tableau croisé****Exemple 10 : Compléter puis exploiter un tableau**

Une population de 100 personnes est étudiée. On sait que 80 personnes vérifient B, 40 ne vérifient pas A, et 17 vérifient A sans vérifier B.

1. Compléter le tableau.

2. Calculer  $P(A \cap B)$ ,  $P_A(B)$  et  $P_B(A)$ .

|           | A  | $\bar{A}$ | Total |
|-----------|----|-----------|-------|
| B         | 43 | 37        | 80    |
| $\bar{B}$ | 17 | 3         | 20    |
| Total     | 60 | 40        | 100   |

$$P(A \cap B) = \frac{43}{100} = 0,43; \quad \text{et} \quad P_A(B) = \frac{43}{60} \approx 0,717; \quad \text{et} \quad P_B(A) = \frac{43}{80} = 0,5375.$$

**Exercice 11 : Deux probabilités conditionnelles**

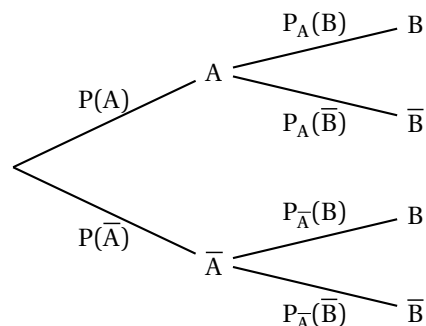
Soient A et B deux évènements tels que  $P(A) = 0,8$ ,  $P(B) = 0,7$  et  $P(A \cap B) = 0,6$ .

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,6}{0,7} = \frac{6}{7} \quad \text{et} \quad P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,6}{0,8} = \frac{3}{4}.$$

**III Arbres pondérés****III.1 Lire un arbre****Définition 12 : Arbre pondéré**

Un **arbre pondéré** représente les différentes étapes d'une expérience aléatoire. Les probabilités sont inscrites sur les branches.

Un **chemin** est une succession de branches allant de la racine à une feuille.

**Propriété 13 : Règle de la somme et du produit**

- La **somme** des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1.

Par exemple :

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1 \quad \text{et} \quad P_A(B) + P_A(\bar{B}) = 1.$$

- La probabilité d'un chemin est le **produit** des probabilités inscrites sur ses branches.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B).$$

**Méthode 14 : Calculer la probabilité d'un évènement**

Lorsqu'un évènement est réalisé par plusieurs chemins :

- calculer la probabilité de chaque chemin par un produit ;
- additionner les probabilités des chemins qui réalisent l'évènement.

**III.2 Construire et exploiter un arbre**

**Exemple 15 : Choisir puis lancer un dé**

Un sac contient 3 dés cubiques, 4 dés tétraédriques et 2 dés octaédriques, tous équilibrés.

On choisit un dé au hasard, puis on le lance. On note :

C : « le dé est cubique »

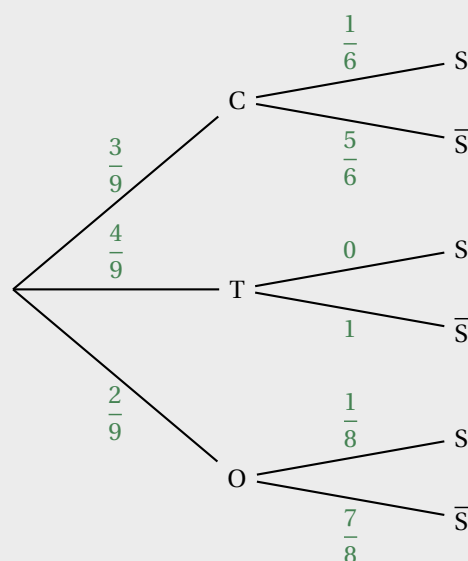
T : « le dé est tétraédrique »

O : « le dé est octaédrique »

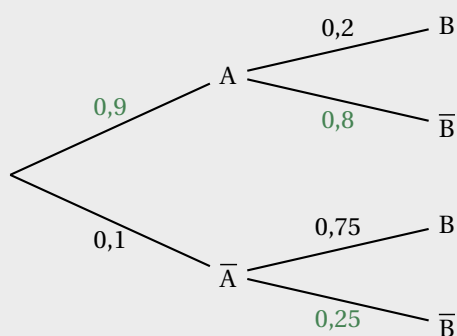
S : « obtenir 6 ».

L'évènement S est réalisé par deux chemins :

$$P(S) = P(C \cap S) + P(O \cap S) = \frac{3}{9} \times \frac{1}{6} + \frac{2}{9} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{12}.$$

**Exercice 16 : Compléter un arbre**

Compléter l'arbre, puis calculer  $P(A \cap B)$  et  $P(\bar{A} \cap B)$ .



$$P(A \cap B) = 0,9 \times 0,2 = 0,18$$

$$P(\bar{A} \cap B) = 0,1 \times 0,75 = 0,075.$$

**Exercice 17 : Deux tirages sans remise**

Dans un jeu de 52 cartes, on tire successivement et sans remise deux cartes. On note  $F_1$  : « la première carte est une figure » et  $F_2$  : « la deuxième carte est une figure ».

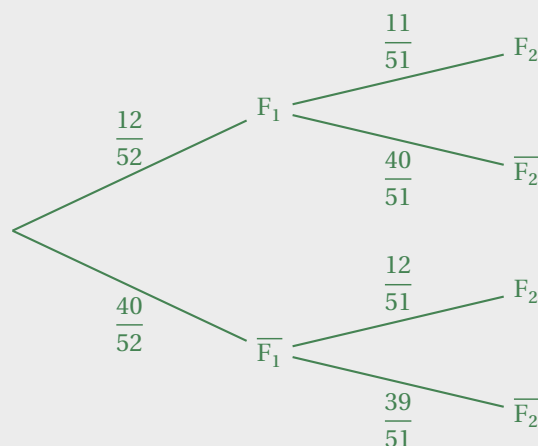
1. Calculer  $P_{F_1}(F_2)$ .
2. Construire un arbre pondéré représentant la situation.
3. Calculer la probabilité de tirer deux figures.

Il y a 12 figures dans le jeu. Après avoir tiré une première figure, il reste 11 figures parmi 51 cartes. Ainsi,

$$P_{F_1}(F_2) = \frac{11}{51}$$

et

$$P(F_1 \cap F_2) = \frac{12}{52} \times \frac{11}{51} = \frac{11}{221}.$$



## IV Indépendance de deux évènements

### Définition 18 : Évènements indépendants

Deux évènements A et B sont **indépendants** lorsque :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

### Propriété 19 : Interprétation conditionnelle

Si  $P(A) > 0$  et  $P(B) > 0$ , les propositions suivantes sont équivalentes :

$$A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \iff P_A(B) = P(B) \iff P_B(A) = P(A).$$

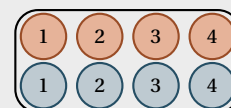
### Méthode 20 : Justifier une indépendance

Calculer séparément  $P(A \cap B)$  et  $P(A) \times P(B)$ , puis comparer les deux résultats.

### Exemple 21 : Boules colorées et numérotées

Une urne contient quatre boules rouges et quatre boules noires, numérotées de 1 à 4 dans chaque couleur. On tire une boule au hasard.

On note R : « la boule est rouge » et U : « la boule porte le numéro 1 ».



On a  $P(R) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ ,  $P(U) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$  et  $P(R \cap U) = \frac{1}{8}$ .

Comme  $P(R) \times P(U) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8} = P(R \cap U)$ , les évènements R et U sont **indépendants**.

### Exemple 22 : Des évènements non indépendants

On choisit au hasard un entier dans  $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ .

On note D : « obtenir un multiple de 2 » et T : « obtenir un multiple de 3 ».

On a  $P(D) = \frac{3}{7}$ ,  $P(T) = \frac{2}{7}$  et  $P(D \cap T) = \frac{1}{7}$ .

Or  $P(D) \times P(T) = \frac{6}{49} \neq \frac{1}{7} = P(D \cap T)$ . Les évènements D et T **ne sont donc pas indépendants**.

### Ne pas confondre

**Incompatibles** signifie que les deux évènements ne peuvent pas se réaliser ensemble :  $A \cap B = \emptyset$ .

**Indépendants** signifie que la réalisation de l'un ne change pas la probabilité de l'autre. Deux évènements indépendants peuvent donc se réaliser ensemble.

### Exercice 23 : Tester une indépendance

On choisit au hasard une issue dans  $\Omega = \{1; 2; \dots; 12\}$ .

On note A : « obtenir un nombre pair » et B : « obtenir un multiple de 3 ».

Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

On a  $P(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ ,  $P(B) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$  et  $A \cap B = \{6; 12\}$ , donc  $P(A \cap B) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ .

Comme  $P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = P(A \cap B)$ , les évènements A et B sont indépendants.

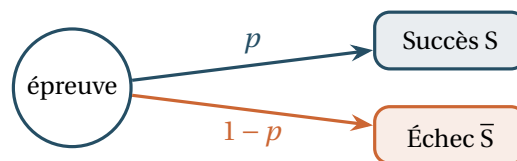
## V Répétitions d'épreuves de Bernoulli

### V.1 Épreuve de Bernoulli

#### Définition 24 : Épreuve de Bernoulli

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire qui ne possède que deux issues :

- un **succès**, noté  $S$ , de probabilité  $p$ ;
- un **échec**, noté  $\bar{S}$ , de probabilité  $1 - p$ .



#### Exemple 25 : Une pièce truquée

On lance une pièce truquée pour laquelle la probabilité d'obtenir Pile est  $\frac{1}{3}$ .

Si l'on choisit « obtenir Pile » comme succès, alors :  $p = \frac{1}{3}$  et  $1 - p = \frac{2}{3}$ .

### V.2 Répéter des épreuves identiques et indépendantes

#### Définition 26 : Répétition d'épreuves de Bernoulli

On répète une même épreuve de Bernoulli lorsque :

- le succès est défini de la même manière à chaque répétition;
- sa probabilité  $p$  reste la même;
- les résultats des différentes répétitions sont indépendants.

Dans l'arbre, chaque nœud donne donc naissance aux mêmes branches  $S$  et  $\bar{S}$ , pondérées par  $p$  et  $1 - p$ .

#### Exemple 27 : Trois lancers indépendants

On lance trois fois, de manière indépendante, la pièce truquée précédente.

On note  $S$  l'évènement « obtenir Pile » à un lancer.

1. La probabilité d'obtenir trois succès est :

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}.$$

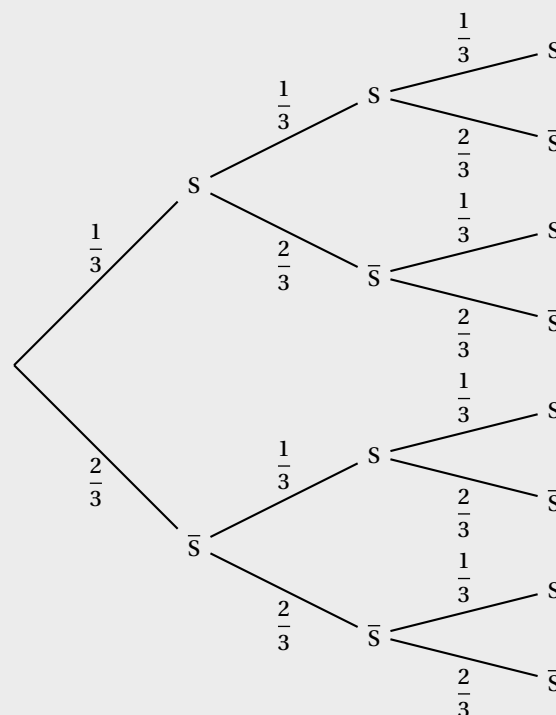
2. Exactement deux succès sont obtenus par les trois chemins

$$SS\bar{S}, \quad S\bar{S}S, \quad \bar{S}SS.$$

Chacun a pour probabilité  $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{27}$ .

Ainsi :

$$P(\text{exactement deux succès}) = 3 \times \frac{2}{27} = \frac{2}{9}.$$



### V.3 Aller jusqu'à quatre répétitions

#### Exemple 28 : Lire un arbre à quatre niveaux

Une épreuve de Bernoulli de succès S vérifie  $P(S) = 0,3$ . Elle est répétée quatre fois de manière identique et indépendante.

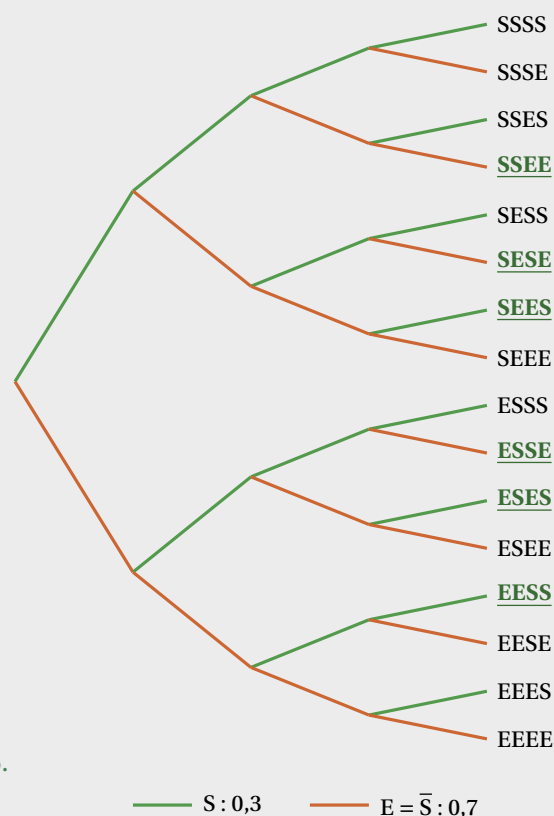
Dans l'arbre ci-contre, chaque branche verte correspond à un succès, de probabilité 0,3, et chaque branche orange à un échec  $E = \bar{S}$ , de probabilité 0,7.

1. Il y a 6 chemins contenant exactement deux succès.
2. Chacun de ces chemins contient deux branches de probabilité 0,3 et deux branches de probabilité 0,7. Il a donc pour probabilité :

$$0,3^2 \times 0,7^2 = 0,0441.$$

3. Ainsi,

$$P(\text{exactement deux succès}) = 6 \times 0,0441 = 0,2646.$$



#### Exercice 29 : Calculer sur quatre répétitions

On reprend l'expérience précédente.

1. Calculer la probabilité d'obtenir quatre succès.
2. Calculer la probabilité de n'obtenir aucun succès.
3. En déduire la probabilité d'obtenir au moins un succès.

$$P(\text{quatre succès}) = 0,3^4 = 0,0081.$$

$$P(\text{aucun succès}) = 0,7^4 = 0,2401.$$

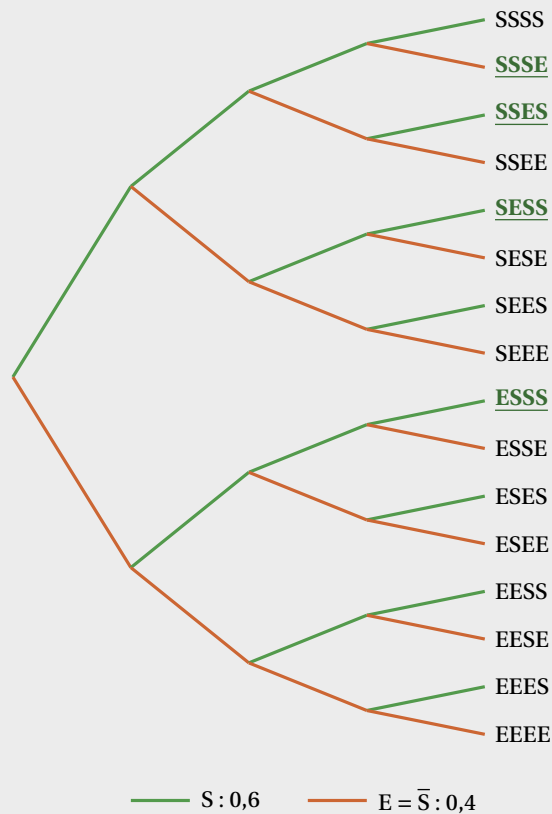
L'évènement contraire de « au moins un succès » est « aucun succès ». Donc

$$P(\text{au moins un succès}) = 1 - 0,2401 = 0,7599.$$

**Exercice 30 : Construire un arbre à quatre niveaux**

Un joueur gagne une partie avec la probabilité 0,6. Il joue quatre parties dans les mêmes conditions, et les résultats des parties sont indépendants.

1. Définir le succès et préciser sa probabilité.
2. Construire l'arbre pondéré de l'expérience.
3. Calculer la probabilité que le joueur gagne exactement trois parties.



On choisit comme succès S : « gagner une partie », avec  $p = 0,6$ .

Il existe quatre chemins comportant exactement trois succès et un échec.

Chacun a pour probabilité  $0,6^3 \times 0,4$ . Ainsi :

$$P(\text{exactement trois victoires}) = 4 \times 0,6^3 \times 0,4 = 0,3456.$$