

VARIATION EXPONENTIELLE

I Suites géométriques : un modèle discret

I.1 Définition et premiers termes

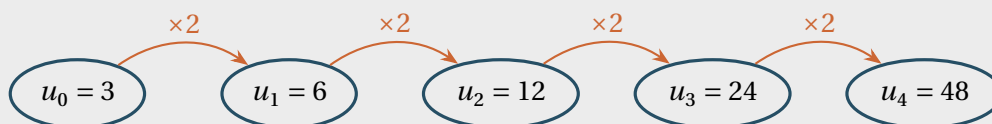
Définition 1

Une suite (u_n) à termes strictement positifs est **géométrique** lorsqu'il existe un réel $q > 0$ tel que, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = q \times u_n.$$

Le nombre q est la **raison** de la suite : pour passer d'un terme au suivant, on multiplie toujours par le même nombre. Cette équation est appelée **relation de récurrence**.

Exemple 2



D'un terme au suivant, on multiplie par 2. La suite est donc géométrique de raison 2 et sa relation de récurrence est :

$$u_{n+1} = 2 \times u_n.$$

Exercice 3 : Compléter des suites

1. Compléter de manière logique les suites suivantes.

A :	4	12	36	108	324
B :	96	48	24	12	6
C :	5	9	13	17	21
D :	1	4	16	64	256

2. Parmi ces suites, identifier celles qui sont géométriques et, pour chacune, donner la raison et la relation de récurrence.

A : Suite géométrique de raison 3 : $A_{n+1} = 3 \times A_n$.

B : Suite géométrique de raison 0,5 : $B_{n+1} = 0,5 \times B_n$.

C : Ce n'est pas une suite géométrique : on ajoute 4 à chaque étape.

D : Suite géométrique de raison 4 : $D_{n+1} = 4 \times D_n$.

Exercice 4 : Calculer des termes d'une suite géométrique

1. Soit (v_n) une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = 4$.

1. Calculer v_1 . $v_1 = 8$

2. Calculer v_3 . $v_3 = 32$

2. Soit (w_n) une suite géométrique de raison 3 telle que $w_1 = 6$.

1. Calculer w_0 . $w_0 = 2$

2. Calculer w_4 . $w_4 = 162$

3. Soit (z_n) une suite géométrique de raison 0,8 et de premier terme $z_0 = 10$.

1. Calculer z_2 . $z_2 = 6,4$

2. Calculer z_{15} .

$$z_{15} = 10 \times 0,8^{15} \approx 0,352$$

I.2 Calculer un terme

Propriété 5

Si (u_n) est une suite géométrique de raison $q > 0$, de premier terme u_0 , alors pour tout entier naturel n :

$$u_n = u_0 \times q^n.$$

Remarque I.1. Si l'on ne connaît pas le terme u_0 , on peut partir de n'importe quel terme u_p connu. Pour tous entiers naturels p et n tels que $n \geq p$:

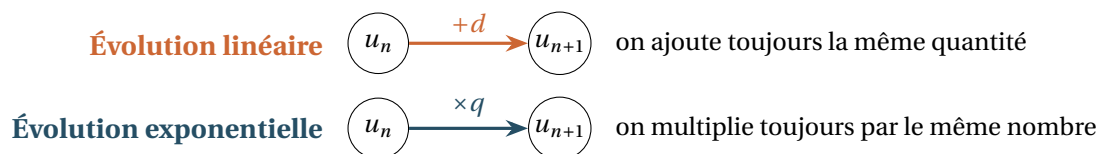
$$u_n = u_p \times q^{n-p}.$$

Méthode 6 : Reconnaître une évolution exponentielle

Le quotient de deux valeurs consécutives doit être constant : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$.

Pour calculer un terme :

- la relation de récurrence $u_{n+1} = q \times u_n$ convient pour avancer terme après terme ;
- l'expression explicite $u_n = u_0 \times q^n$ permet d'atteindre directement un rang éloigné.



Exercice 7 : Reconnaître un modèle exponentiel

On observe les valeurs successives de trois grandeurs.

- Quelles suites modélisent une évolution exponentielle ?
- Pour chacune d'elles, donner la raison et l'expression explicite.

Les quotients consécutifs sont constants pour (A_n) et (D_n) . On a $A_n = 5 \times 1,2^n$ et $D_n = 100 \times 0,8^n$. La suite (B_n) est arithmétique : on retranche 3 à chaque étape.

n	0	1	2	3
A_n	5	6	7,2	8,64
B_n	20	17	14	11
D_n	100	80	64	51,2

I.3 Variations et représentation

Propriété 8

Soit (u_n) une suite géométrique à **termes strictement positifs**, de raison $q > 0$.

- Si $q > 1$, la suite est strictement croissante.
- Si $0 < q < 1$, la suite est strictement décroissante.
- Si $q = 1$, la suite est constante.

Propriété 9

La représentation graphique d'une suite est le nuage des points $(n ; u_n)$. Seuls les points d'abscisses entières appartiennent à cette représentation.

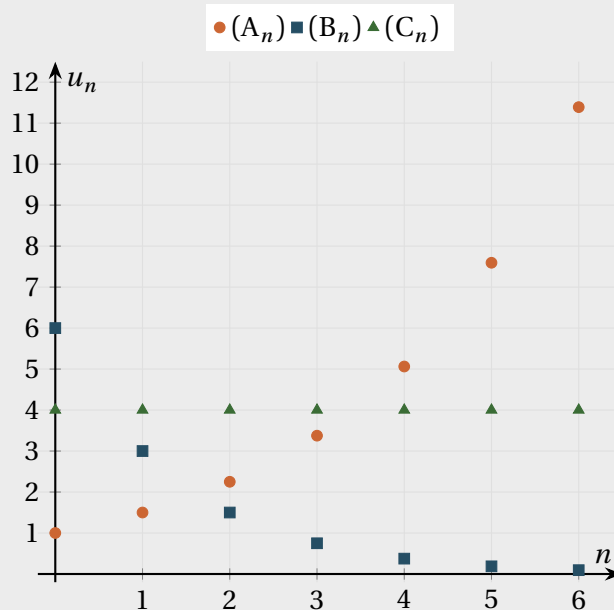
Exercice 10 : Calculer puis représenter des suites géométriques

On considère les trois suites suivantes :

1. $A_{n+1} = 1,5 \times A_n$, avec $A_0 = 1$;
2. $B_n = 6 \times 0,5^n$;
3. (C_n) est géométrique de raison 1, avec $C_0 = 4$.

Calculer successivement les termes de rang 0 à 6, en arrondissant au centième si nécessaire. Après chaque calcul, placer immédiatement le point correspondant dans le repère, en respectant le symbole associé à la suite.

n	0	1	2	3	4	5	6
A_n	1	1,5	2,25	3,38	5,06	7,59	11,39
B_n	6	3	1,5	0,75	0,38	0,19	0,09
C_n	4	4	4	4	4	4	4

**Exercice 11 : Calculer et interpréter**

Au début d'une expérience, une culture contient 150 bactéries. Sa population augmente de 40 % chaque jour. On note P_n la population après n jours.

1. Donner P_0 , la raison de la suite et sa relation de récurrence.
2. Exprimer P_n en fonction de n , puis estimer P_5 .

On a $P_0 = 150$ et $q = 1,4$, donc $P_{n+1} = 1,4 \times P_n$ et $P_n = 150 \times 1,4^n$. Ainsi $P_5 \approx 807$ bactéries.

II Fonctions exponentielles : du discret au continu**Définition 12**

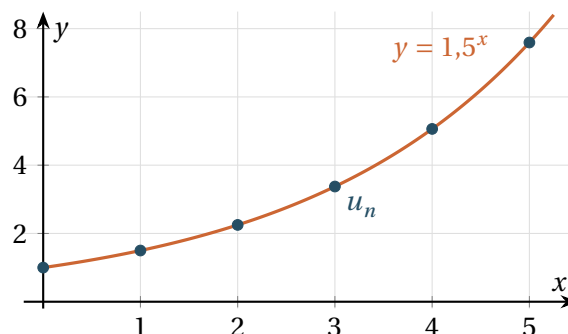
Soit $a > 0$. La **fonction exponentielle de base a** est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = a^x.$$

Remarque II.1. La fonction exponentielle de base a prolonge la suite géométrique de raison a lorsque l'exposant n'est plus nécessairement un entier naturel.

Pour la suite $u_n = 1,5^n$, seuls les points d'abscisses entières sont représentés.

La fonction $f(x) = 1,5^x$ permet de compléter ce nuage par une courbe continue et d'estimer la quantité entre deux étapes.



Propriété 13

Pour $a > 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$a^0 = 1; \quad a^1 = a; \quad a^x > 0; \quad a^x a^y = a^{x+y}; \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}; \quad (a^x)^n = a^{xn}.$$

Exemple 14 : Utiliser les propriétés algébriques

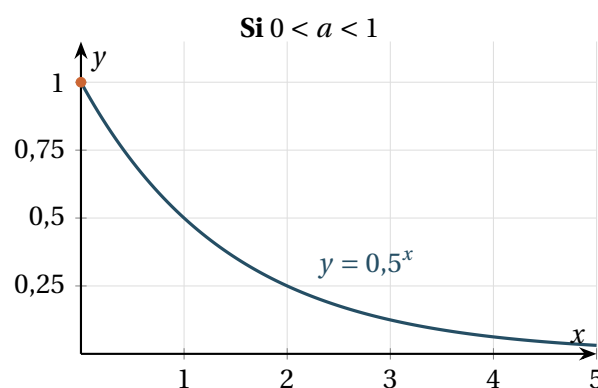
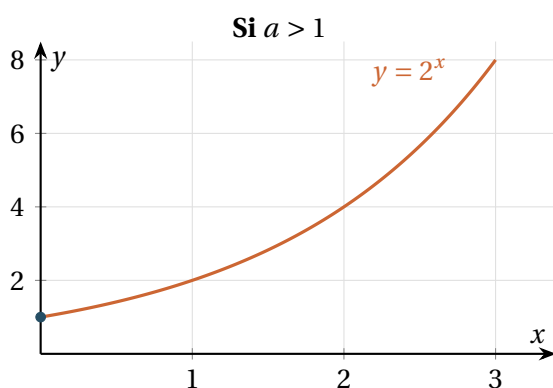
$$2^{1,3} \times 2^{0,7} = 2^{1,3+0,7} = 2^2 = 4, \quad \frac{5^{2,8}}{5^{1,3}} = 5^{2,8-1,3} = 5^{1,5} \approx 11,18 \text{ et } (3^{0,5})^2 = 3^{0,5 \times 2} = 3.$$

II.1 Variations et représentation**Propriété 15**

La fonction $x \mapsto a^x$:

- est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ si $a > 1$;
- est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$ si $0 < a < 1$;
- est constante si $a = 1$.

Sa courbe passe toujours par le point $(0; 1)$ et reste au-dessus de l'axe des abscisses.

**Exemple 16 : Une durée non entière**

Un capital de 5 000 euros est placé à un taux annuel de 4 %. Avec un modèle continu, sa valeur après x années est

$$C(x) = 5000 \times 1,04^x.$$

Après deux ans et demi,

$$C(2,5) = 5000 \times 1,04^{2,5} \approx 5515,10.$$

Exercice 17 : Comprendre le rôle de la base

On considère les fonctions $f(x) = 1,08^x$ et $g(x) = 0,92^x$, définies sur $[0; +\infty[$.

1. Donner leur sens de variation.
2. Calculer $f(3,5)$ et $g(6)$, arrondis au millièmes.
3. Interpréter $g(6)$ comme un coefficient multiplicateur global.

La fonction f est croissante et g est décroissante. On obtient $f(3,5) \approx 1,309$ et $g(6) \approx 0,606$. Six baisses successives de 8 % correspondent donc à une baisse globale d'environ 39,4 %.

III Racines et taux d'évolution moyen

Définition 18

Soient $A > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. La **racine n -ième** de A est l'unique nombre positif, noté $\sqrt[n]{A}$, dont la puissance n -ième vaut A .

$$\left(\sqrt[n]{A}\right)^n = A \quad \text{et} \quad \sqrt[n]{A} = A^{1/n}.$$

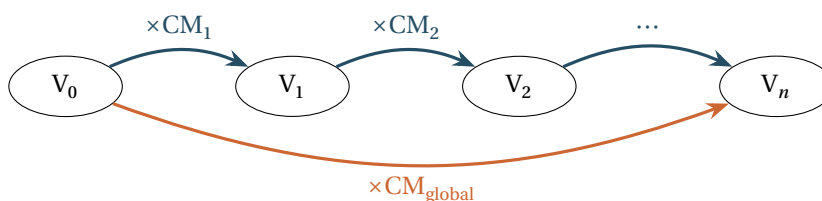
Exemple 19

On a $\sqrt[2]{9} = 3$, car $3^2 = 9$, et $\sqrt[5]{32} = 2$, car $2^5 = 32$.

Définition 20

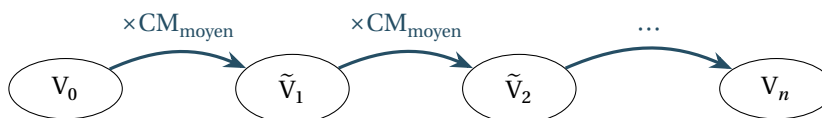
Soit n en entier naturel non nul. Si une valeur de départ V_0 subit n évolutions successives de coefficients multiplicateurs $CM_1, CM_2, \dots, CM_n$, alors le **coefficient multiplicateur global** est donné par :

$$CM_{\text{global}} = CM_1 \times CM_2 \times \dots \times CM_n.$$



On définit alors le **coefficient multiplicateur moyen** :

$$CM_{\text{moyen}} = \sqrt[n]{CM_{\text{global}}} = CM_{\text{global}}^{1/n}.$$



Le taux d'évolution moyen associé est :

$$t_{\text{moyen}} = CM_{\text{moyen}} - 1.$$

Exemple 21 : Déterminer un taux moyen

Un prix augmente de 10 %, puis de 30 %, avant de baisser de 10 %.

1. $CM_{\text{global}} = 1,10 \times 1,30 \times 0,90 = 1,287$.
2. $CM_{\text{moyen}} = \sqrt[3]{1,287} \approx 1,088$.
3. Le taux moyen est donc d'environ 8,8 % par étape.

Exercice 22 : Calculer un taux annuel moyen

La valeur d'un bien augmente globalement de 18 % en quatre ans. Déterminer le taux annuel moyen correspondant, arrondi à 0,1 %.

Le coefficient global vaut 1,18. Ainsi $CM_{\text{moyen}} = \sqrt[4]{1,18} \approx 1,0422$. Le taux annuel moyen est donc d'environ 4,2 %.

IV Ordres de grandeur et problèmes de seuil

Exemple 23 : Franchir un seuil

Une population de 500 individus augmente de 30 % par heure. On note N_n la population après n heures. On cherche la première heure à laquelle la population dépasse 1 500.

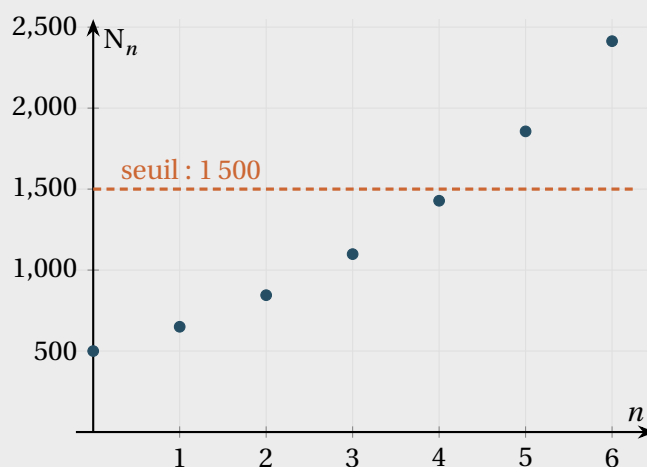
$$N_n = 500 \times 1,3^n.$$

Le graphique permet d'estimer que le seuil est franchi entre les rangs 4 et 5.

On vérifie :

$$N_4 \approx 1\,450 \quad \text{et} \quad N_5 \approx 1\,900.$$

Le premier rang convenable est donc $n = 5$.



Exercice 24 : Une décroissance exponentielle

Un médicament est présent dans le sang à une quantité initiale de 120 mg. Chaque heure, l'organisme en élimine 22 %. On note M_n la quantité restante après n heures.

1. Montrer que (M_n) est géométrique et exprimer M_n en fonction de n .
2. Calculer M_7 et M_8 , arrondis au dixième.
3. À partir de quelle heure la quantité devient-elle strictement inférieure à 20 mg?

La raison est $1 - 0,22 = 0,78$, donc $M_n = 120 \times 0,78^n$. On obtient $M_7 \approx 21,1$ mg et $M_8 \approx 16,4$ mg. La quantité devient inférieure à 20 mg à partir de la huitième heure.

Exercice 25 : Comparer une évolution linéaire et une évolution exponentielle

Deux comptes contiennent initialement 200 euros.

- Sur le compte A, on ajoute 30 euros chaque mois.
- Sur le compte B, le capital augmente de 12 % chaque mois.

On note A_n et B_n les capitaux après n mois.

1. Identifier la nature de chaque évolution et exprimer A_n et B_n en fonction de n .
2. Compléter le tableau, en arrondissant au dixième.

n	0	3	4	5	10
A_n	200	290	320	350	500
B_n	200	281,0	314,7	352,5	621,2

3. À partir de quel mois le capital du compte B dépasse-t-il celui du compte A?

On a $A_n = 200 + 30n$, tandis que $B_n = 200 \times 1,12^n$. Le compte B reste inférieur au compte A au rang 4, puis le dépasse au rang 5 : il devient donc plus avantageux à partir du cinquième mois.