

VARIATION LINÉAIRE

I Suites arithmétiques : un modèle discret

I.1 Suites numériques

Définition 1

Une **suite numérique** u est une fonction définie sur les entiers naturels. Le nombre $u(n)$ est le **terme de rang** n , souvent noté u_n .

Remarque I.1. u_n est le terme de rang n (*un seul terme*); (u_n) désigne la suite dans son ensemble (*tous les termes*).

Exercice 2

On considère la suite définie par $w(n) = 3n + 1$.

Calculer $w(0)$ et $w(10)$.

$w(0) = 3 \times 0 + 1 = 1$; $w(10) = 3 \times 10 + 1 = 31$.

Exercice 3

Inès paie un abonnement annuel de 30 euros, puis 4,10 euros par film.

1. Modéliser la situation par une suite v . (*Faire une phrase pour décrire $v(n)$ ou v_n .*)

On note $v(n)$ (ou v_n) la somme totale payée par Inès après avoir vu n films.

2. Combien paie-t-elle au total si elle va voir 0 film, 2 films, 6 films ou n films?

$$v_0 = 30; \quad v_2 = 38,40; \quad v_6 = 54,60; \quad v_n = 30 + 4,10 \times n.$$

Définition 4

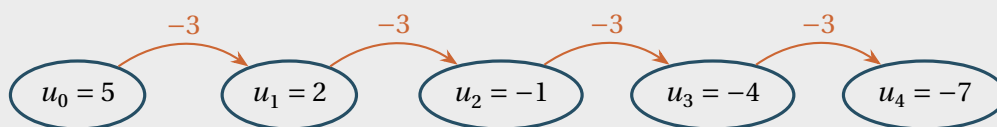
Une suite (u_n) est **arithmétique** lorsqu'il existe un réel r tel que, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

Le nombre r est la **raison** de la suite. D'un terme au suivant, on ajoute toujours la même quantité.

Remarque I.2. La formule ci-dessus est appelée **relation de récurrence**.

Exemple 5



Dans le schéma ci-dessus, on passe d'un terme au suivant en ajoutant -3 .

La suite est donc arithmétique de raison -3 et sa relation de récurrence est :

$$u_{n+1} = u_n - 3.$$

Exemple 6

Une grandeur vaut initialement 12 et augmente de 5 à chaque étape. En notant u_n sa valeur après n étapes :

$$u_0 = 12 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n + 5.$$

La suite est arithmétique de raison 5.

Exercice 7

1. Compléter de manière logique les suites suivantes :

$$A: \quad 7 \quad 4 \quad 1 \quad -2 \quad -5$$

$$B: \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 9 \quad 11$$

$$C: \quad -4 \quad 0 \quad 4 \quad 8 \quad 12$$

$$D: \quad 1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad 16$$

2. Parmi ces suites, identifier celles qui sont arithmétiques et, pour chacune, donner la raison et la relation de récurrence.

A : C'est une suite arithmétique de raison -3 : $u_{n+1} = u_n - 3$.

B : C'est une suite arithmétique de raison 2 : $u_{n+1} = u_n + 2$.

C : C'est une suite arithmétique de raison 4 : $u_{n+1} = u_n + 4$.

D : Ce n'est pas une suite arithmétique. (La même valeur n'est pas ajoutée à chaque étape.)

Exercice 8

1. Soit (v_n) la suite arithmétique de raison 2,5 telle que $v_0 = 4$.

a. Calculer v_1 . $v_1 = 6,5$

b. Calculer v_3 . $v_3 = 11,5$

2. Soit (w_n) la suite arithmétique de raison -3 telle que $w_1 = 5$.

a. Calculer w_0 . $w_0 = 8$

b. Calculer w_4 . $w_4 = -4$

3. Soit (z_n) la suite arithmétique de raison 4 telle que $z_0 = -1$.

a. Calculer z_2 . $z_2 = 7$

b. Calculer z_{15} . $z_{15} = 59$

I.2 Calculer un terme**Proposition 9**

Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 , alors, pour tout entier naturel n :

$$u_n = u_0 + nr.$$

Remarque I.3. Cette formule donne l'expression du **terme général**, la **forme explicite** d'une suite. Si l'on ne connaît pas le terme u_0 , on peut partir de n'importe quel terme u_p connu :

$$u_n = u_p + (n - p)r.$$

Méthode 10

Pour calculer un terme :

- la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + r$ convient pour avancer terme après terme ;
- l'expression explicite $u_n = u_0 + nr$ permet d'atteindre directement un rang éloigné.

Exercice 11

Victor part faire un voyage à vélo. Le premier jour, il parcourt 30 km. Puis, chaque jour, il parcourt 12 kilomètres de plus que le jour précédent.

1. Modéliser cette situation à l'aide d'une suite, que l'on notera (d_n) .

On note d_n la distance parcourue par Victor le n -ième jour.

2. Donner le premier terme et la relation de récurrence de cette suite.

$d_1 = 30$ et, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $d_{n+1} = d_n + 12$.

3. Donner la nature de la suite.

C'est une suite arithmétique de raison $r = 12$.

4. Donner l'expression du terme général de cette suite.

Son terme général est $d_n = 30 + 12(n - 1) = 18 + 12n$.

5. À partir de quel jour Victor parcourra-t-il au moins 100 km ?

On cherche à résoudre l'inéquation :

$$\begin{aligned} 18 + 12n &\geq 100 \\ \Leftrightarrow 12n &\geq 82 \\ \Leftrightarrow n &\geq \frac{82}{12} \approx 6,83 \end{aligned}$$

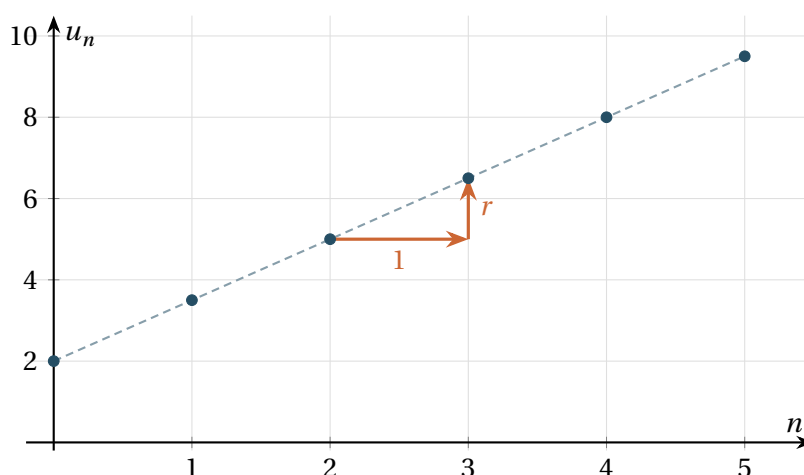
Victor parcourra donc au moins 100 km à partir du **septième** jour.

I.3 Variations et représentation graphique**Définition 12**

La représentation graphique d'une suite (u_n) est le nuage formé par les points de coordonnées $(n; u_n)$.

Proposition 13

Pour une suite arithmétique, la représentation graphique est un nuage de points **alignés**.



On parle de croissance **linéaire**.

Proposition 14

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .

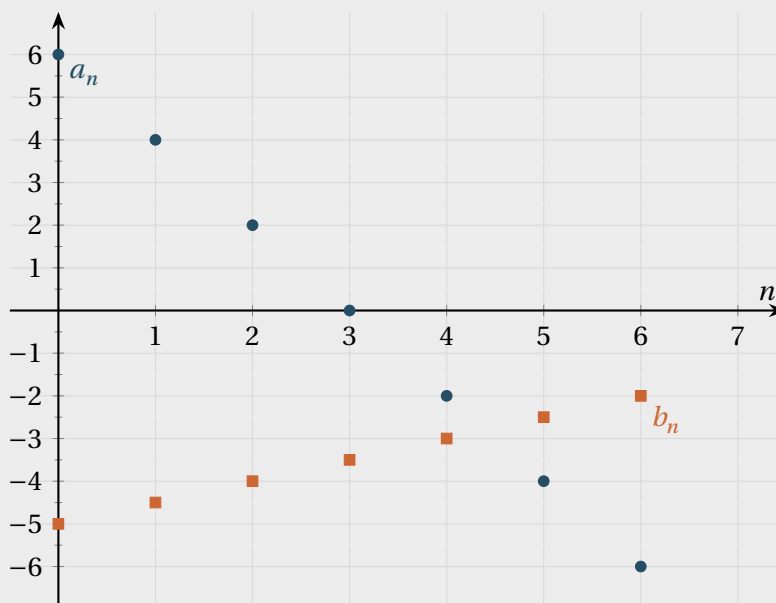
- Si $r > 0$, la suite est **strictement croissante**.
- Si $r < 0$, la suite est **strictement décroissante**.
- Si $r = 0$, la suite est **constante**.

Exercice 15 : Calculer puis représenter

Calculer les sept premiers termes des suites suivantes, puis placer les points correspondants dans le repère :

1. $\begin{cases} a_0 = 6 \\ a_{n+1} = a_n - 2 \end{cases}$

2. $b_n = -5 + 0,5n$.

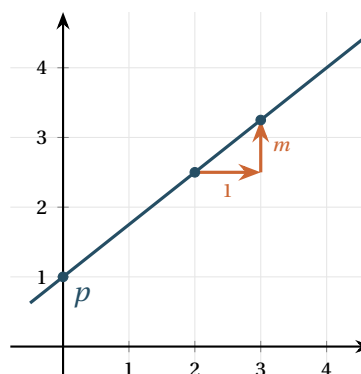
**II Fonctions affines : un modèle continu****Définition 16**

Une fonction affine est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = mx + p,$$

où m est le **coefficient directeur** et p l'**ordonnée à l'origine**.

Sa représentation graphique est une droite.



Remarque II.1. Les fonctions linéaires sont les fonctions affines pour lesquelles $p = 0$.

Exercice 17

Identifier parmi les fonctions suivantes celles qui sont affines et, pour chacune, donner le coefficient directeur m et l'ordonnée à l'origine p le cas échéant.

1. $f(x) = 3x - 6$

C'est une fonction affine, avec $m = 3$ et $p = -6$.

2. $g(x) = \frac{1}{2} - \sqrt{3}x$

C'est une fonction affine, avec $m = -\sqrt{3}$ et $p = \frac{1}{2}$.

3. $h(x) = 2x^2 - 6$

Ce n'est pas une fonction affine.

4. $r(x) = 2$

C'est une fonction affine, avec $m = 0$ et $p = 2$.

5. $q(x) = \frac{3x - 6}{2}$

C'est une fonction affine, avec $m = \frac{3}{2}$ et $p = -3$.

Proposition 18

Pour deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ d'une droite, avec $x_A \neq x_B$, le coefficient directeur de cette droite est :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

En particulier, si on considère une fonction affine définie par $f(x) = mx + p$, alors, pour $a \neq b$, on a :

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Proposition 19

Soit f une fonction affine définie par $f(x) = mx + p$.

- Si $m > 0$, alors f est strictement croissante.
- Si $m < 0$, alors f est strictement décroissante.
- Si $m = 0$, alors f est constante.

Méthode 20

Pour déterminer l'équation d'une droite :

1. calculer son coefficient directeur m à partir de deux points;
2. remplacer x et y par les coordonnées d'un point dans $y = mx + p$ pour identifier p .

Exercice 21 : Déterminer l'expression d'une fonction affine

On considère une fonction affine f dont la courbe représentative passe par les points $A(2; -3)$ et $B(4; 5)$. Déterminer l'expression explicite de f .

Il faut chercher l'équation de la droite. Puisqu'elle passe par les points A et B, on peut calculer son coefficient directeur :

$$m = \frac{5 - (-3)}{4 - 2} = 4.$$

Ensuite, puisque A appartient à la droite, on en déduit :

$$-3 = 4 \times 2 + p,$$

et donc $p = -11$. Finalement, on obtient :

$$f(x) = 4x - 11.$$

Exercice 22 : Lire des fonctions affines sur un graphique

Déterminer l'expression de chacune des fonctions représentées ci-dessous.

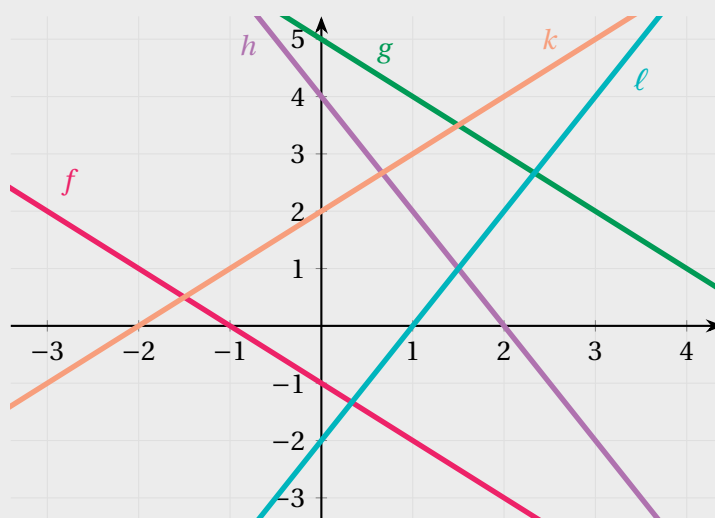
$$f(x) = -x - 1$$

$$g(x) = -x + 5$$

$$h(x) = -2x + 4$$

$$k(x) = x + 2$$

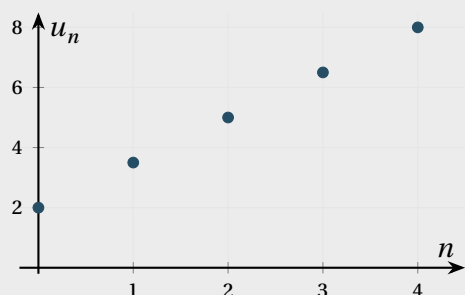
$$\ell(x) = 2x - 2$$

**III Choisir le bon modèle**

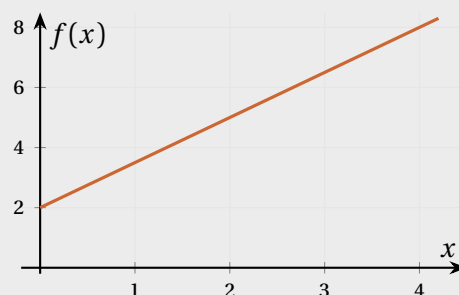
	Suite arithmétique	Fonction affine
Type de grandeur	Discrète : rangs entiers	Continue : toutes les valeurs d'un intervalle
Écriture	$u_{n+1} = u_n + r$ ou $u_n = u_0 + nr$	$f(x) = mx + p$
Représentation	Points alignés	Droite continue
Variation	Accroissement constant r	Taux d'accroissement constant m

Exemple 23 : Une même expression, deux modèles différents

Les expressions $u_n = 2 + \frac{3}{2}n$ et $f(x) = 2 + \frac{3}{2}x$ se ressemblent, mais leurs représentations ne contiennent pas les mêmes points.

Modèle discret : n est entier

Seuls les points d'abscisses entières appartiennent à la suite.

Modèle continu : x est réel

Tous les points de la droite appartiennent à la représentation de f .

Exercice 24 : Suite ou fonction ?

Un cinéma propose une carte de fidélité. Lors de son inscription, Yanis reçoit 10 points. Il gagne ensuite 4 points à chaque film regardé.

On note u_n son nombre de points après avoir regardé n films.

1. Justifier que (u_n) est une suite arithmétique.

D'un film au suivant, le nombre de points augmente toujours de 4. La suite (u_n) est donc arithmétique de raison $r = 4$ et de premier terme $u_0 = 10$.

2. Donner l'expression de u_n en fonction de n .

Pour tout entier naturel n :

$$u_n = u_0 + nr = 10 + 4n.$$

3. Combien de points Yanis possède-t-il après avoir regardé 5 films?

$$u_5 = 10 + 4 \times 5 = 30.$$

Yanis possède donc 30 points après avoir regardé 5 films.

Le parking du cinéma coûte 2 euros, auxquels s'ajoutent 1,50 euro par heure de stationnement. On note $C(t)$ le prix payé pour t heures de stationnement.

4. Expliquer pourquoi cette situation est modélisée par une fonction affine.

La durée de stationnement peut prendre toutes les valeurs réelles positives : c'est une grandeur continue. De plus, le prix augmente de 1,50 euro par heure à partir d'un prix initial de 2 euros. Cette situation est donc modélisée par une fonction affine.

5. Donner l'expression de $C(t)$, puis calculer le prix payé pour 3 h 30 de stationnement.

Le prix payé pour t heures de stationnement est :

$$C(t) = 2 + 1,50t.$$

Or 3 h 30 correspondent à 3,5 heures. Ainsi :

$$C(3,5) = 2 + 1,50 \times 3,5 = 7,25.$$

Le stationnement coûte donc 7,25 euros.