

FONCTION EXPONENTIELLE

Compétences travaillées :

Découvrir la fonction exponentielle; utiliser la relation fonctionnelle; manipuler les propriétés algébriques de l'exponentielle; étudier les variations de la fonction exponentielle; dériver des fonctions contenant une exponentielle; résoudre des équations et inéquations avec des exponentielles.

I Définition et propriétés

I.1 Définition

Définition 1

Il existe une unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$f' = f \quad \text{et} \quad f(0) = 1.$$

Cette fonction est appelée **fonction exponentielle** et se note :

$$\exp \quad \text{ou} \quad x \mapsto e^x.$$

Remarque I.1. On a donc pour tout réel x : $(e^x)' = e^x$ et $e^0 = 1$.

Définition 2

On définit la constante d'Euler par :

$$e := e^1$$

dont une valeur approchée est : $e \approx 2,718$.

I.2 Propriétés algébriques

Propriété 3 : Relation fonctionnelle

Pour tous réels x et y :

$$e^{x+y} = e^x \times e^y.$$

Propriété 4

Pour tous réels x et y , et pour tout entier relatif n :

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

$$e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$$

$$e^{nx} = (e^x)^n$$

$$e^x > 0$$

Exemple 5

$$e^{-3} = \frac{1}{e^3}$$

$$e^{2-\sqrt{5}} = \frac{e^2}{e^{\sqrt{5}}}$$

$$e^{4x} = (e^x)^4$$

Exemple 6

$$\begin{aligned}
 A &= e^{x+1} e^{3x-1} \\
 &= e^{(x+1)+(3x-1)} \\
 &= e^{4x}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{e^{x-1}}{e^{x+2}} \\
 &= e^{(x-1)-(x+2)} \\
 &= e^{-3}
 \end{aligned}$$

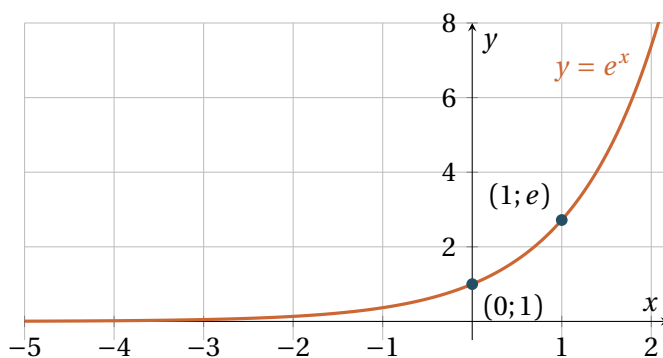
II Étude de la fonction exponentielle**Propriété 7**

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

On admet que :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty.$$

x	$-\infty$	$+\infty$
e^x	0	$+\infty$



Remarque II.1. La courbe représentative de la fonction exponentielle :

- est toujours au-dessus de l'axe des abscisses (elle ne coupe jamais l'axe);
- passe par les points $(0; 1)$ et $(1; e)$;

III Dérivation et étude de fonctions**Propriété 8**

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I .

Alors :

$$(e^u)' = u' e^u.$$

Propriété 9

Soit $k > 0$.

$$(e^{kt})' = k e^{kt}$$

$$(e^{-kt})' = -k e^{-kt}$$

La fonction $t \mapsto e^{kt}$ est strictement croissante et la fonction $t \mapsto e^{-kt}$ est strictement décroissante.

Exemple 10

Soit :

$$g(x) = e^{5x-2}.$$

Alors :

$$g'(x) = 5e^{5x-2}.$$

Exemple 11 : Étudier une fonction

Soit :

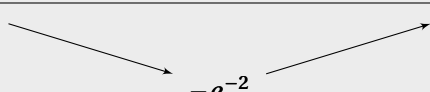
$$f(x) = (x+1)e^x.$$

Dérivée

$$f'(x) = e^x + (x+1)e^x$$

$$f'(x) = e^x(x+2)$$

Signe de la dérivéeComme $e^x > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $x+2$.

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$x+2$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f			

La fonction f admet donc un minimum en -2 , égal à :

$$f(-2) = -e^{-2}.$$

Exemple 12 : Tangente

On considère :

$$f(x) = (x+1)e^x.$$

Une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 est :

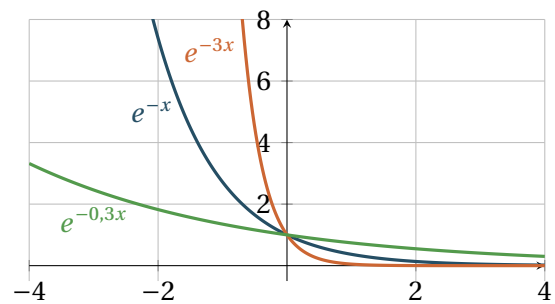
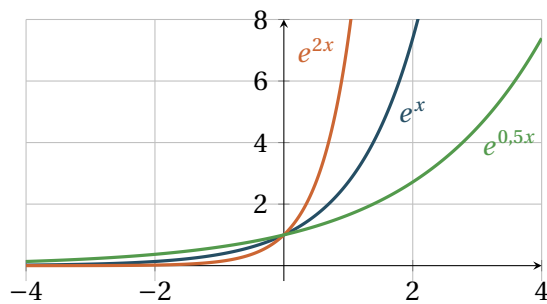
$$y = f'(0)(x-0) + f(0).$$

Or :

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad f'(0) = 2.$$

Donc :

$$\boxed{y = 2x + 1}$$



IV Équations et inéquations

Propriété 13

Pour tous réels a et b :

$$e^a = e^b \iff a = b$$

et :

$$e^a < e^b \iff a < b.$$

Exemple 14 : Résoudre une équation

$$e^{x^2-3} - e^{-2x} = 0$$

$$\iff e^{x^2-3} = e^{-2x}$$

$$\iff x^2 - 3 = -2x$$

$$\iff x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\Delta = 16$$

Donc :

$$x = -3 \quad \text{ou} \quad x = 1.$$

Exemple 15 : Résoudre une inéquation

$$e^{4x-1} \geq 1$$

$$\iff e^{4x-1} \geq e^0$$

$$\iff 4x - 1 \geq 0$$

$$\iff x \geq \frac{1}{4}.$$