

# FONCTION POLYNÔME DU SECOND DEGRÉ

## Compétences travaillées :

Fonction polynôme du second degré donnée sous forme factorisée. Racines, signe, expression de la somme et du produit des racines. Forme canonique d'une fonction polynôme du second degré. Discriminant. Factorisation éventuelle. Résolution d'une équation du second degré. Signe.

## I Fonction polynôme du second degré

### Définition 1

On appelle **fonction polynôme du second degré** une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  et pouvant s'écrire :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

sous **forme développée** avec  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tels que  $a \neq 0$ .  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont les **coefficients** de la fonction  $f$ .

**Remarque :** On parle aussi de fonction trinôme du second degré ou plus simplement trinôme du second degré. On dit que ces fonctions sont du **second** degré, car l'exposant le plus élevé est 2.

### Exemple 2

Déterminer parmi les fonctions suivantes lesquelles sont des fonctions polynômes du second degré et leurs coefficients.

- $f(x) = x^2 - 7x + 12$  .....
- $f(t) = 4t^2$  .....
- $f(y) = 6y(y - \frac{1}{3})$  .....
- $f(x) = 2(x - 3)^2 + 1$  .....
- $f(x) = 2x + 1$  .....
- $f(x) = 6x^3 + 4x + 2$  .....
- $f(x) = (x - 1)^2 - (x + 2)^2$  .....

### Définition 3

Soient  $a, b, c, \alpha, \beta, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  tels que  $a \neq 0$ .

- $f(x) = ax^2 + bx + c$  est un trinôme du second degré sous **forme développée**,
- $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$  est un trinôme du second degré sous **forme canonique**,
- $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$  est un trinôme du second degré sous **forme factorisée**.

### Définition 4

On appelle **racine** du trinôme du second degré  $f$  tout nombre  $x_1$  tel que  $f(x_1) = 0$ . Autrement dit, les racines du trinôme sont les antécédents de zéro, soit les solutions de :

$$f(x) = 0.$$

**Remarque :** Supposons que le trinôme du second degré  $f$  admet une forme factorisée  $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ . Si les racines  $x_1$  et  $x_2$  sont distinctes, on dit parfois que ceux sont des « racines simples ». Si elles sont confondues, on dit parfois que  $f$  possède une « racine double », que l'on note  $x_0$ . Dans ce cas,  $f(x) = a(x - x_0)^2$ , et les formes canonique et factorisée sont confondues.

**Exemple 5**

- $f(x) = 3(x - 2)^2 + 5$  : forme canonique. Coefficients :  $a = 3$ ,  $\alpha = 2$  et  $\beta = 5$ .

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 3(x - 2)^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow 3(x - 2)^2 = -5 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = -\frac{5}{3}.$$

Un carré ne peut être négatif,  $f$  n'admet donc pas de racine.

- $g(x) = 5(x - 1)^2$  : forme factorisée (ou canonique). Coefficients :  $a = 3$ ,  $x_0 = 1$ .

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow 5(x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

$g$  admet donc une unique racine :  $x_0 = 1$ .

- $h(x) = 2(x + 4)(x - 1)$  : forme factorisée. Coefficients :  $a = 2$ ,  $x_1 = -4$  et  $x_2 = 1$ .

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow 2(x + 4)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow (x + 4)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = -4 \text{ ou } x = 1.$$

$h$  admet donc deux racines distinctes :  $x_1 = -4$  et  $x_2 = 1$ .

**Remarque :** Les fonctions polynomiales du second degré peuvent posséder 0, 1 ou 2 racines.

**Propriété 6**

Soit la fonction polynomiale du second degré  $f(x) = ax^2 + bx + c$  (avec  $a \neq 0$ ).

Si  $f$  peut être mis sous forme factorisée,  $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ , alors :

1. La fonction  $f$  admet  $x_1$  et  $x_2$  pour racines.
2. De plus, ces racines sont reliées par les égalités :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

*Démonstration.*

1. Puisque  $a \neq 0$ , on a :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow a(x - x_1)(x - x_2) = 0 \Leftrightarrow x = x_1 \text{ ou } x = x_2.$$

Si  $x_1$  et  $x_2$  sont distinctes, on a deux « racines simples », sinon on a une « racine double ».

2. On développe la forme factorisée :

$$a(x - x_1)(x - x_2) = a(x^2 - x_2x - x_1x + x_1x_2) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2.$$

Par identification, on obtient :  $b = -a(x_1 + x_2)$  et  $c = ax_1x_2$ . On en déduit que :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

□

**Exemple 7**

- On admet que le trinôme  $P(x) = 8x^2 + 10x - 3$  admet deux racines  $x_1$  et  $x_2$ . Donner la somme et le produit de ces racines.

.....

- Supposons que le trinôme  $P(x) = 2x^2 + bx + c$  possède deux racines distinctes  $x_1$  et  $x_2$  tels que  $x_1 + x_2 = 3$  et  $x_1 x_2 = \frac{5}{2}$ . Déterminer les coefficients  $b$  et  $c$ .

.....

## II Trinôme sous forme canonique et variation

### II.1 Détermination de la forme canonique

#### Propriété 8

Tout trinôme du second degré  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , avec  $a \neq 0$ , peut s'écrire sous la forme canonique  $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$  avec  $\alpha = \frac{-b}{2a}$  et  $\beta = -\frac{\Delta}{4a}$ , où  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

*Démonstration.* Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On a :

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c.$$

Or :

$$f(x) = x^2 + \frac{b}{a}x = x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}.$$

On en déduit donc :

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Pour simplifier cette écriture, on pose  $\Delta = b^2 - 4ac$ . □

#### Exemple 9

Déterminer la forme canonique de chacune des fonctions suivantes :

- $f(x) = x^2 - 4x + 4$  .....
- $g(x) = 5x^2 + 10x + 20$  .....
- $h(x) = -6x^2 + x + 1$  .....

#### Définition 10

On appelle **discriminant** du trinôme du second degré  $f(x) = ax^2 + bx + c$  la quantité  $\Delta := b^2 - 4ac$ .

### II.2 Variation de la fonction trinôme

#### Propriété 11

Soit  $f$  la fonction polynomiale du second degré de forme canonique  $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ .

• Si  $a > 0$ , alors  $f$  admet un **minimum**  $\beta$ , atteint au point d'abscisse  $\alpha$ .

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
Variations de $f$	$+\infty$	$\beta$	$+\infty$

• Si  $a < 0$ , alors  $f$  admet un **maximum**  $\beta$ , atteint au point d'abscisse  $\alpha$ .

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
Variations de $f$	$-\infty$	$\beta$	$-\infty$

*Démonstration.* On considère la forme canonique :  $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ .

Pour tout  $x$  et  $\alpha$  réels, on a  $(x - \alpha)^2 \geq 0$ .

• Si  $a > 0$ , alors  $a(x - \alpha)^2 \geq 0$  et  $a(x - \alpha)^2 + \beta \geq \beta$ .

En outre,  $f(\alpha) = \beta$ . Par conséquent,  $f$  admet un minimum  $\beta$ , atteint au point d'abscisse  $\alpha$ .

- Si  $a < 0$ , alors  $a(x - \alpha)^2 \leq 0$  et  $a(x - \alpha)^2 + \beta \leq \beta$ .  
En outre,  $f(\alpha) = \beta$ . Par conséquent,  $f$  admet un maximum  $\beta$ , atteint au point d'abscisse  $\alpha$ .

□

**Exemple 12**

Déterminer le tableau de variation de chacune des fonctions suivantes :

- $f(x) = x^2 - 4x + 4$  .....

$x$	
Variations de $f$	

- $g(x) = 5x^2 + 10x + 20$  .....

$x$	
Variations de $g$	

- $h(x) = -6x^2 + x + 1$  .....

$x$	
Variations de $h$	

**II.3 Représentation graphique**

**Propriété 13**

La représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré est une **parabole**.

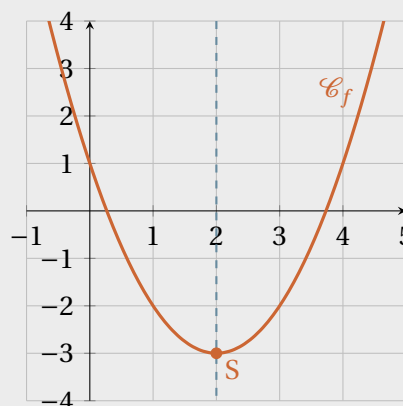
- Elle est « tournée vers le haut »  $\cup$  si  $a > 0$ , ou « tournée vers le bas »  $\cap$  si  $a < 0$ .
- Son **axe de symétrie** est la droite d'équation :  $x = \frac{-b}{2a}$
- Le point  $S(\frac{-b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a})$  est son **sommet**, où  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

**Exemple 14**

On considère le trinôme  $f(x) = x^2 - 4x + 1$ . La **courbe représentative**  $\mathcal{C}_f$  de la fonction définie par  $f$  est la **parabole** d'équation  $y = x^2 - 4x + 1$ . La forme canonique de cette fonction est :

$f(x) = \dots\dots\dots$

Cette parabole a pour sommet  $S(\dots; \dots)$  et pour axe de symétrie la droite d'équation  $\dots\dots$ . Dans un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , cette parabole a la forme ci-contre.



### III Résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$

#### Propriété 15

On considère le trinôme  $ax^2 + bx + c$  avec  $a \neq 0$  et on pose  $\Delta = b^2 - 4ac$ . L'équation  $ax^2 + bx + c = 0$  :

1. n'admet aucune solution réelle si  $\Delta < 0$ ;
2. admet une unique solution réelle  $x_0 = -\frac{b}{2a}$  si  $\Delta = 0$ ;
3. admet deux solutions réelles distinctes  $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$  et  $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$  si  $\Delta > 0$ .

*Démonstration.* Pour résoudre l'équation  $ax^2 + bx + c = 0$ , on exploite la forme canonique, et puisque  $a \neq 0$ , cela revient à résoudre l'équation :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}.$$

1. Si  $\Delta < 0$ , cette équation n'a pas de solution, car un carré n'est jamais négatif.
2. Si  $\Delta = 0$ , alors l'équation devient :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}.$$

3. Si  $\Delta > 0$ , alors l'équation devient :

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} &= \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} && \text{ou} && x + \frac{b}{2a} &= -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} && \text{ou} && x &= -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} && \text{ou} && x &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}. \end{aligned}$$

□

#### Exemple 16

Déterminer l'ensemble des solutions des équations suivantes :

1.  $5x^2 + 10x + 20 = 0$  .....
2.  $x^2 - 4x + 4 = 0$  .....
3.  $-6x^2 + x + 1 = 0$  .....

#### Exemple 17

Résoudre l'équation suivante :

$$x^2 + 5x - 10 = 3x^2 - 4x - 1.$$

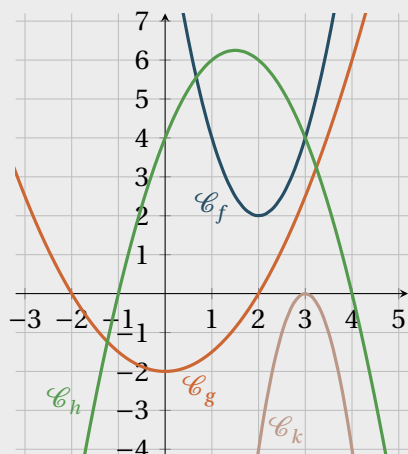
.....

.....

#### Méthode 18

Pour déterminer graphiquement les racines d'une fonction polynôme du second degré, on cherchera les abscisses des points d'intersection entre la parabole correspondante et l'axe des abscisses.

## Exemple 19



Déterminer graphiquement, si elles existent, les racines des fonctions  $f$ ,  $g$ ,  $h$  et  $k$ .

1. ....
2. ....
3. ....
4. ....

## IV Factorisation et signe du trinôme

## Propriété 20

La fonction  $f(x) = ax^2 + bx + c$  se factorise en produit de facteurs du premier degré de la manière suivante :

- Si  $\Delta > 0$ , alors :  $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ , où  $x_1$  et  $x_2$  sont les racines du trinôme.
- Si  $\Delta = 0$ , alors :  $f(x) = a(x - x_0)^2$ , où  $x_0$  est la racine double du trinôme.

**Remarque :** Si  $\Delta < 0$ , alors le trinôme ne possède pas de forme factorisée.

## Propriété 21

On considère la fonction  $f(x) = ax^2 + bx + c$ .

- Si  $\Delta < 0$ , alors  $f$  est toujours du signe de  $a$  :

$x$	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $f(x)$	signe de $a$	

- Si  $\Delta = 0$ , on note  $x_0$  la racine et on obtient le tableau de signes suivant :

$x$	$-\infty$	$x_0$	$+\infty$
Signe de $f(x)$	signe de $a$	0	signe de $a$

- Si  $\Delta > 0$ , supposons que les racines de  $f$  sont rangées de sortes que  $x_1 < x_2$ , on obtient alors le tableau de signes suivant :

$x$	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$+\infty$	
Signe de $f(x)$	signe de $a$	0	signe de $-a$	0	signe de $a$

**Exemple 22**

Déterminer le tableau de signes de chacune des fonctions suivantes :

- $f(x) = 5x^2 + 6x + 2$  .....

$x$	
Signe de $f(x)$	

- $g(x) = x^2 - 4x + 4$  .....

$x$	
Signe de $g(x)$	

- $h(x) = x^2 - 4x + 4$  .....

$x$	
Signe de $h(x)$	

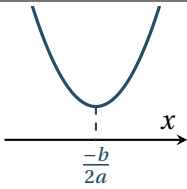
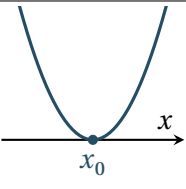
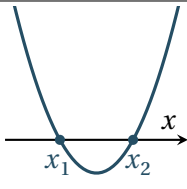
**Exemple 23**

Résoudre l'inéquation :

$$x^2 - 4x + 1 \geq 0.$$

**V Tableau récapitulatif**

On considère la fonction polynôme du second degré  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , avec  $a \neq 0$ . On note  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
$f$ admet	aucune racine réelle	une seule racine $x_0 = \frac{-b}{2a}$	deux racines $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
forme factorisée de $f$	impossible	$a(x - x_0)^2$	$a(x - x_1)(x - x_2)$
$a > 0$			
$a < 0$	