

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

Compétences travaillées : Probabilité conditionnelle d'un évènement B sachant un évènement A de probabilité non nulle. Notation $P_A(B)$. Indépendance de deux évènements. Arbres pondérés et calcul de probabilités : règle du produit, de la somme. Partition de l'univers (systèmes complets d'évènements). Formule des probabilités totales. Succession de deux épreuves indépendantes. Représentation par un arbre ou un tableau.

Dans ce chapitre, on considère une expérience aléatoire, d'univers associé Ω , muni d'une loi de probabilité P .

I Probabilités conditionnelles

I.1 Probabilité conditionnelle de B sachant A

Définition 1

Soient A et B deux évènements de l'univers Ω , avec $P(A) \neq 0$.

La probabilité que l'évènement B se réalise, **sachant que** l'évènement A est réalisé, est le nombre $P_A(B)$, défini par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

$P_A(B)$ se lit **probabilité conditionnelle de B sachant A**.

Remarques :

1. P_A est une nouvelle loi de probabilité sur l'univers Ω .
2. Pour tout évènement B de Ω , $0 \leq P_A(B) \leq 1$.
3. $P_A(A) = 1$, $P_A(\bar{A})$ et $P_A(\Omega) = 1$. Si B est un évènement impossible, alors $P_A(B) = 0$.
4. Si $P(B) \neq 0$, on peut définir de même la probabilité conditionnelle de A sachant B par :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Propriété 2

En situation d'équiprobabilité, on a :

$$P_A(B) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(A)}.$$

Exemple 3

Dans une université, il y a 867 étudiants de licence, répartis comme suit :

	1 ^{ère} année	2 ^{ème} année	3 ^{ème} année	Total
Filles	203	116	161	480
Garçons	140	134	113	387
Total	343	250	274	867

On choisit un étudiant au hasard, et on considère les évènements suivants :

F : « L'étudiant choisi est une fille. »

G : « L'étudiant choisi est un garçon. »

L : « L'étudiant choisi est un étudiant de première année de Licence. »

D : « L'étudiant choisi est un étudiant de deuxième année de Licence. »

T : « L'étudiant choisi est un étudiant de troisième année de Licence. »

Dans cet exercice, on arrondira les résultats à 10^{-2} près.

- Déterminer la probabilité que l'étudiant choisi soit une fille.
- Déterminer la probabilité que l'étudiant choisi soit une fille de troisième année de Licence.
- En déduire la probabilité que l'étudiant soit un élève de troisième année de licence, en sachant que cet étudiant est une fille.

Méthode 1 :

Méthode 2 :

Propriété 4

Soient A et B deux évènements de Ω avec $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$. On a :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A).$$

Exemple 5

40 % des chiens d'un éleveur sont des labradors. Les femelles représentent 65 % des labradors et 45 % des autres chiens. On choisit au hasard le carnet de santé de l'un des chiens de l'éleveur. On note L l'évènement : « le chien est un labrador » et F l'évènement : « le chien est une femelle ».

1. Donner la probabilité de l'évènement L.
2. Donner la probabilité de l'évènement F sachant l'évènement L.
3. Calculer la probabilité que le chien soit un labrador femelle.

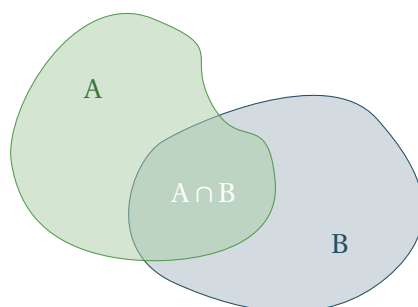
I.2 Arbre pondéré par des probabilités

Propriété 6

Pour tout évènement A et B de l'univers Ω , on a :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Si C et D sont incompatibles (ou disjoints), c'est-à-dire « $C \cap D = \emptyset$ », alors : $P(C \cup D) = P(C) + P(D)$.



Propriété 7

Soit A un évènement de l'univers Ω tel que $P(A) \neq 0$. Pour tout évènement B, on a :

$$P_A(B) + P_A(\bar{B}) = 1.$$

Démonstration.

.....

.....

.....

.....

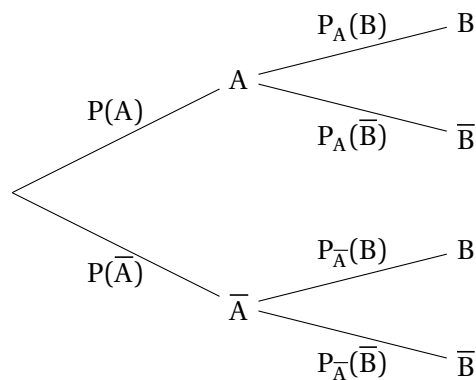
.....

.....

□

De nombreuses situations peuvent être modélisées par des arbres à deux niveaux.

Exemple fondamental : Soient A et B deux évènements de l'univers Ω avec $0 < P(A) < 1$.



Sur chaque branche, on inscrit la probabilité associée. On obtient ainsi un **arbre pondéré**.

Propriété 8

Sur les branches du premier niveau, on inscrit les probabilités des évènements correspondants.

Propriété 9

Sur les branches du second niveau, on inscrit les probabilités conditionnelles.

Propriété 10 : Règle du produit

La probabilité d'un évènement représenté par un chemin (succession de branches, qui représente l'intersection des évènements rencontrés sur ce chemin) est égale au produit des probabilités inscrites sur chaque branche du chemin.

Propriété 11 : Règle de la somme

La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est toujours égale à 1.

Remarque : Les règles du produit et de la somme découlent des propriétés 4 et 6.

Exemple 12

Lors d'une épidémie chez les bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir; sinon la maladie est mortelle.

Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux, dont 2 % est porteur de la maladie. On obtient les résultats suivants :

- sachant qu'un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas,
- sachant qu'un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.

On choisit un animal au hasard. On note les évènements :

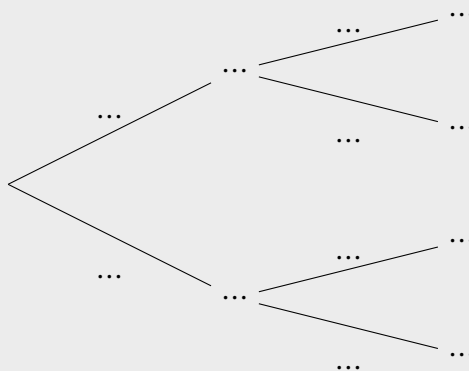
M : « Être porteur de la maladie ».

T : « Avoir un test positif ».

1. Traduire les données de l'énoncé en termes de probabilités.

.....

2. Compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui illustre la situation.



3. En déduire la probabilité de choisir un animal malade dont le test est positif.

.....

II Formule des probabilités totales

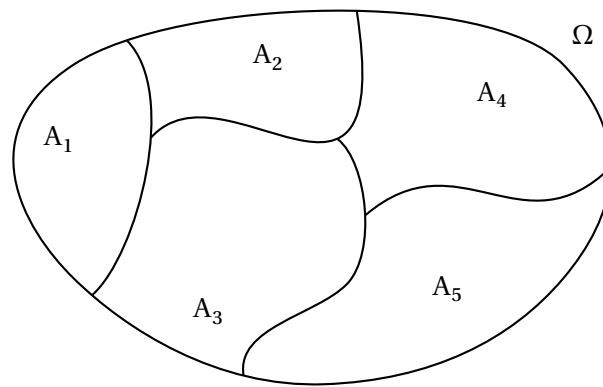
II.1 Partition de l'univers

Définition 13

On dit que les évènements A_1, A_2, \dots, A_n forment une **partition de l'univers** Ω lorsque :

1. Pour tout entier naturel $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $P(A_i) \neq 0$.
2. Pour tous entiers naturels i et j de $\llbracket 1; n \rrbracket$ tels que $i \neq j$, les évènements A_i et A_j sont incompatibles.
3. $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$.

Voici un schéma qui illustre cette situation dans le cas $n = 5$:

**Exemple 14**

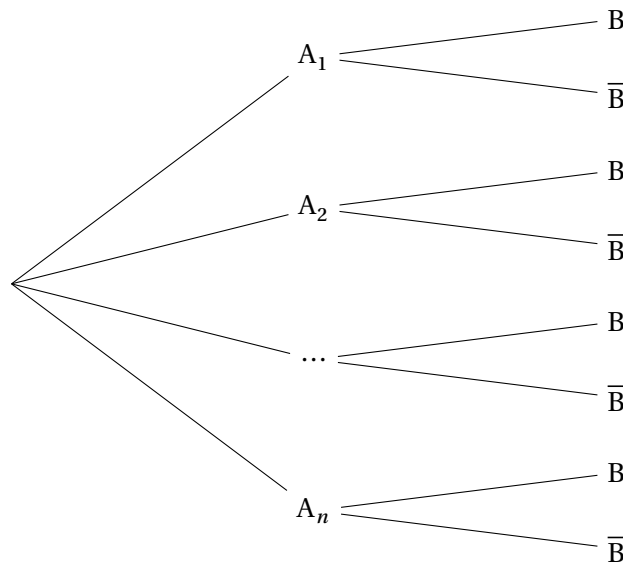
Si A est un évènement tel que $0 < P(A) < 1$, alors A et \bar{A} forment une partition de l'univers Ω .

Exemple 15

Dans l'exemple 3, les évènements L , D et T forment une partition de l'univers. En effet :

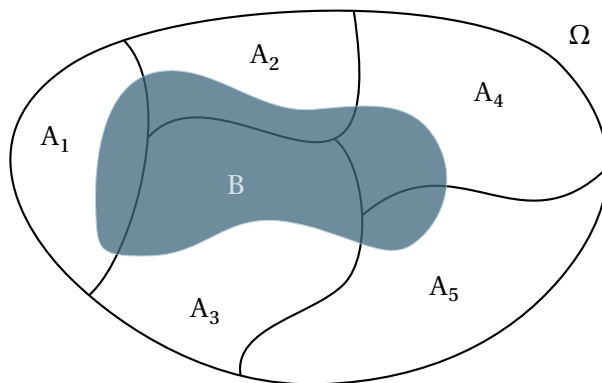
1. L , D et T sont de probabilité non nulle (il y a au moins un élève dans chaque classe).
2. Les évènements sont incompatibles deux à deux (un étudiant ne peut pas être dans deux classes différentes en même temps).
3. Un étudiant est forcément dans une classe, donc $L \cup D \cup T = \Omega$.

Remarque : Si B est un évènement et si A_1, A_2, \dots, A_n forment une partition de l'univers Ω , on peut modéliser la situation à l'aide d'un arbre pondéré :

**II.2 Formule des probabilités totales****Propriété 16**

Soient A_1, A_2, \dots, A_n qui forment une partition de l'univers Ω . Pour tout évènement B , on a la **formule des probabilités totales** :

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B) \\ &= P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \dots + P(A_n) \times P_{A_n}(B). \end{aligned}$$



Exemple 17 : un exemple fondamental

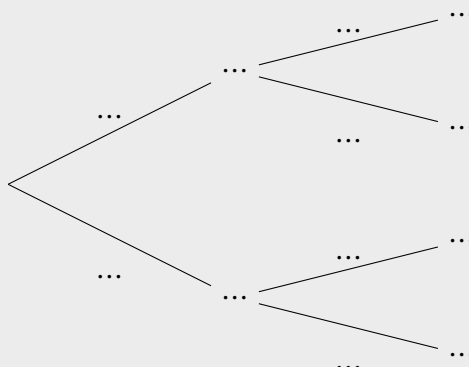
Soient A et B deux évènements de l'univers Ω , tels que $0 < P(A) < 1$. Puisque A et \bar{A} forment une partition de l'univers Ω , d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B).$$

Exemple 18

Reprenons l'exemple 5.

1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.



2. Calculer la probabilité que le chien soit une femelle.

.....

.....

.....

.....

III Indépendance

III.1 Évènements indépendants

Définition 19

Soit A et B deux évènements de l'univers Ω . On dit que A et B sont indépendants si et seulement si :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Exemple 20

On lance un dé équilibré à 6 faces. On note C l'évènement « obtenir un chiffre pair », T l'évènement « obtenir un multiple de 3 » et Q l'évènement « obtenir un multiple de 4 ».

1. Montrer que les évènements C et T sont indépendants.

.....

2. Les évènements C et Q sont-ils indépendants?

.....

Remarque : Ne pas confondre évènements indépendants et évènements incompatibles.

Propriété 21

Soient A et B deux évènements de l'univers Ω avec $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$.

A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$ (ou bien, si et seulement si $P_B(A) = P(A)$).

Démonstration.

.....

□

III.2 Succession d'épreuves indépendantes**Définition 22**

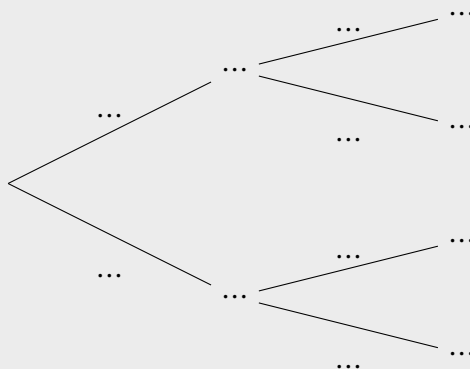
Considérons deux expériences aléatoires réalisées successivement. On dit que l'on réalise une succession de deux épreuves indépendantes si les résultats de la première expérience n'ont aucune influence sur les résultats de la seconde.

Remarque : On peut représenter une succession de deux épreuves indépendantes à l'aide d'un arbre pondérée ou d'un tableau à double entrée.

Exemple 23

On lance successivement deux fois une pièce truquée. La probabilité d'obtenir Pile à l'issue du lancer est de $\frac{1}{3}$. On note P_i l'évènement « obtenir un Pile à l'issue du $i^{\text{ème}}$ lancer ».

1. Représenté la situation par un arbre pondéré.



2. Dresser un tableau représentant cette expérience aléatoire.

Propriété 24

Si les évènements A et B sont indépendants, alors A et \bar{B} sont également indépendants.

Démonstration. D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = P(A) \times P(B) + P(A \cap \bar{B})$$

car A et B sont indépendants. On en déduit donc :

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A) \times P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A) \times P(\bar{B})$$

ce qui prouve que A et \bar{B} sont également indépendants. □