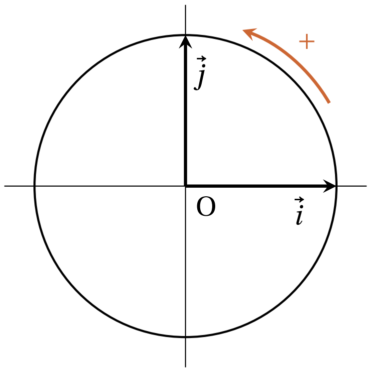
Trigonométrie

Compétences travaillées :
Cercle trigonométrique, longueur d'arc et radian. Enroulement de la droite sur le cercle et image d'un nombre réel. Cosinus et sinus d'un nombre réel, lien avec le triangle rectangle. Valeurs remarquables. Fonctions sinus et cosinus : parité, périodicité et courbes représentatives.

I Cercle trigonométrique

Définition 1

On travaille dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.
On appelle **cercle trigonométrique** le cercle centré en O de rayon 1.
On l'oriente dans le **sens trigonométrique** (ou sens **direct**, **positif** ou **sens anti-horaire**) : c'est le sens inverse de celui des aiguilles d'une montre.



Remarque I.1. Le cercle trigonométrique a pour **périmètre** : 2π (en unités de longueur).

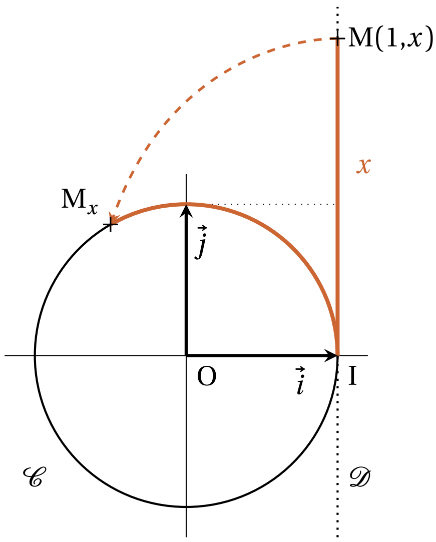
I.1 Droite enroulée et point associé

Définition 2

On note $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique et $\mathscr{D}$ la droite tangente à $\mathscr{C}$ au point I(1,0).

À tout réel x, on associe le point $M(1,x)$ de la droite $\mathscr{D}$. En « enroulant » la droite $\mathscr{D}$ autour du cercle $\mathscr{C}$, le point M vient se placer sur $\mathscr{C}$.

On obtient ainsi un **unique point** du cercle trigonométrique, appelé **point associé** au réel x, que l'on note M_x.



Remarque I.2. À chaque réel correspond un unique point associé sur le cercle trigonométrique. Mais il est possible de trouver plusieurs réels de la droite qui ont le même point associé (il suffit de faire plusieurs tours complets supplémentaires).

Propriété 3

Soit $a \in \mathbb{R}$ et M_a le point qui lui est associé sur le cercle trigonométrique.

- Le point M_a est aussi associé à tout réel de la forme $a + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. On dit que l'on a fait k tours de cercle.
- Plus généralement, si a et b sont deux réels tels que $a - b = 2k\pi$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$, alors a et b sont associés au **même point** du cercle.

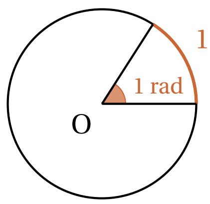
Exemple 4

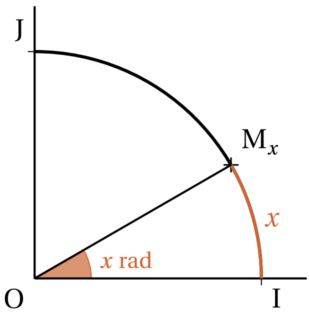
1. Donner deux réels associés au point correspondant à 4π.
   4π correspond à deux tours complet, on revient donc à l'origine, donc 0 est associé au même point.
2. Déterminer un réel associé à $\dfrac{13\pi}{3}$ appartenant à l'intervalle $[0,2\pi]$.
   $\dfrac{13\pi}{3} - 2\pi = \dfrac{7\pi}{3}$ mais $\dfrac{7}{3} > 2$. $\dfrac{7\pi}{3} - 2\pi = \dfrac{\pi}{3} \in [0,2\pi]$.

II Mesure d'un angle en radian

Définition 5

Un **radian** (rad) est la mesure de l'angle qui intercepte un arc de longueur 1 du cercle trigonométrique.





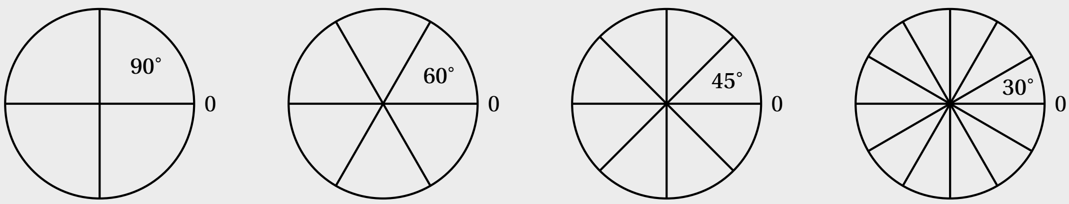
On se place dans le repère $(O;I,J)$. Soit $x \in \mathbb{R}$ et M_x le point qui lui est associé sur le cercle trigonométrique.

La mesure de l'angle orienté $\widehat{IOM_x}$ est de x radians. On note :

$$\widehat{IOM_x} = x \text{ rad}.$$

Remarque II.1. La mesure en radian d'un angle correspond à la longueur de l'arc de cercle intercepté sur le cercle trigonométrique.

Exemple 6

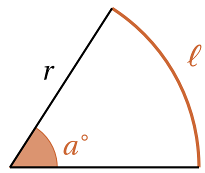


Angle en degrés	0	360	180	90	45	60	30	−30	210	315
Angle en radian	0	2π	π	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{6}$	$-\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{7\pi}{6}$	$-\dfrac{\pi}{4}$

Propriété 7

Sur un cercle de rayon r, la longueur ℓ d'un arc correspondant à un angle de a degrés est donnée par :

$$\ell = \frac{\pi}{180} a \times r.$$



Remarque II.2. Sur le cercle trigonométrique (rayon $r = 1$), la longueur de l'arc est donc simplement $\ell = \frac{\pi}{180} a$.

Exemple 8

Question : Quelle est la mesure en degrés de 1 rad?

On sait que π rad correspondent à 180°. Donc 1 rad $= \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57{,}3^\circ$.

À retenir

Pour convertir un angle, il suffit de retenir l'équivalence entre **π radians** et **180 degrés**.
À l'aide d'un produit en croix, on obtient alors les formules :

$$a \text{ rad} = \frac{180}{\pi} a^\circ \qquad \text{et} \qquad a^\circ = \frac{\pi}{180} a \text{ rad}.$$

Exemple 9

Convertir 150 degrés en radians. $150^\circ = \frac{\pi}{180} 150 \text{ rad} = \frac{5\pi}{6} \text{ rad}$

Convertir $\frac{\pi}{18}$ radians en degrés. $\frac{\pi}{18} \text{ rad} = \frac{180}{\pi} \frac{\pi}{18} \text{ deg} = 10^\circ$

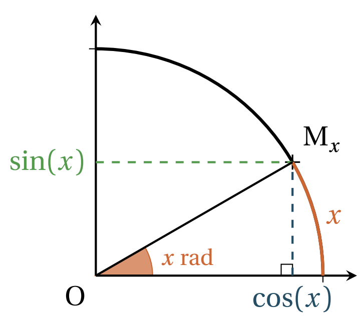
III Cosinus et sinus

III.1 Trigonométrie dans un triangle

Définition 10

Soit $x \in \mathbb{R}$ et M_x le point qui lui est associé sur le cercle trigonométrique.

- Le **cosinus** de x est l'abscisse du point M_x. On le note $\cos(x)$.
- Le **sinus** de x est l'ordonnée du point M_x. On le note $\sin(x)$.



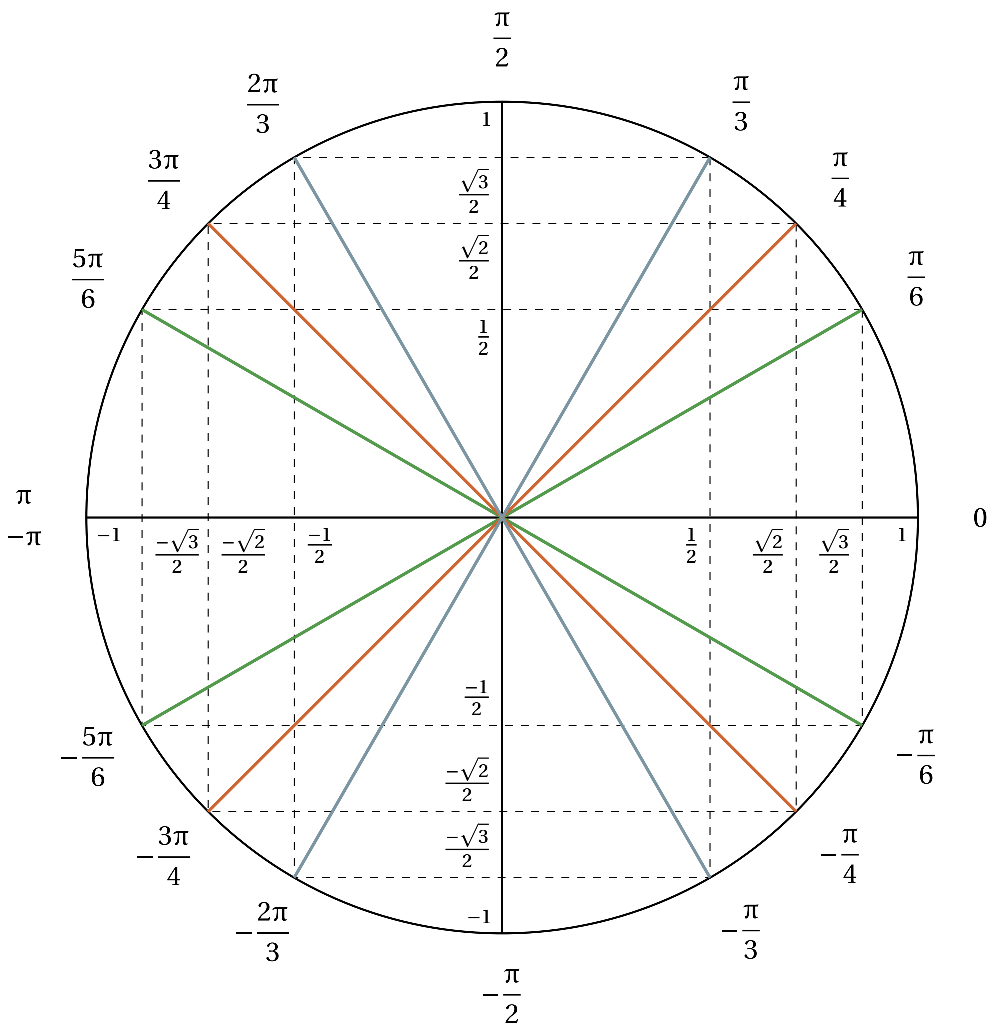
Remarque III.1. Sur le cercle trigonométrique, le point M_x a pour coordonnées $M_x(\cos(x); \sin(x))$.

Propriété 11

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

- $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$;
- une formule fondamentale :
$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1\ ;$$
- pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$:
$$\cos(x + 2k\pi) = \cos(x) \qquad \text{et} \qquad \sin(x + 2k\pi) = \sin(x).$$

III.2 Valeurs remarquables



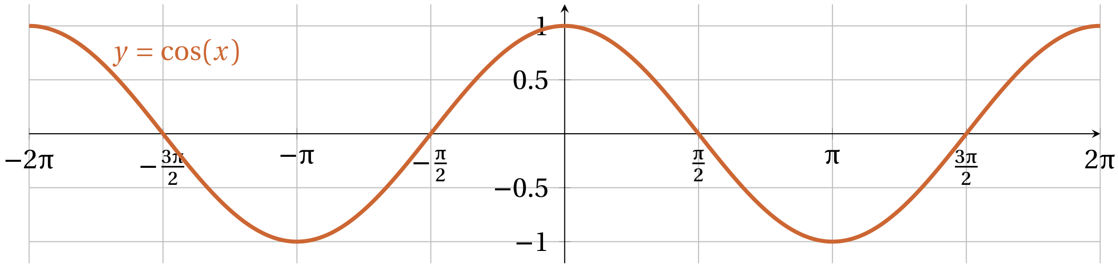
Angle θ (en degrés)	0	30	45	60	90	120	135	150	180
Angle θ (en radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

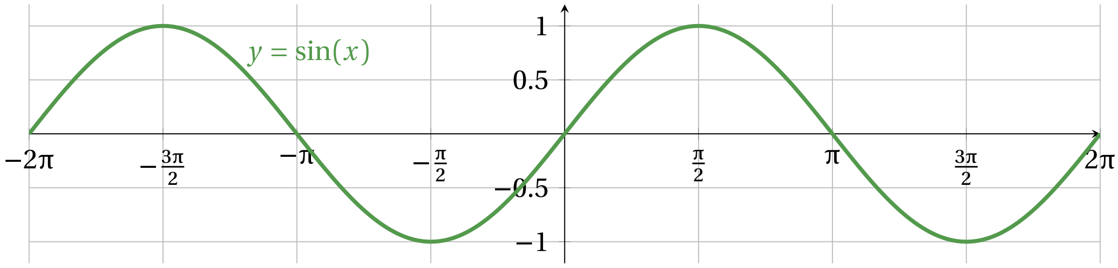
III.3 Étude des fonctions cosinus et sinus

Définition 12

- La **fonction cosinus** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui à tout réel x associe $\cos(x)$.
- La **fonction sinus** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui à tout réel x associe $\sin(x)$.

Courbe représentative des fonctions





Propriété 13

Les deux fonctions sont des fonctions **périodiques** de période 2π.
De plus :

- la fonction **cosinus** est **paire** : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(-x) = \cos(x)$.
- la fonction **sinus** est **impaire** : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(-x) = -\sin(x)$.

Apprendre à tracer un cercle trigonométrique.