

SUITES NUMÉRIQUES

Compétences travaillées :

Calculer les termes d'une suite à partir d'une forme récurrente ou explicite ; représentation graphique ; étudier le sens de variation ; modéliser à l'aide des suites ; conjecturer la limite éventuelle d'une suite.

I Mode de génération d'une suite numérique, plusieurs écritures

I.1 Définition

Définition 1

On définit une **suite numérique** (notée u ou (u_n)) par une fonction définie sur \mathbb{N} par :

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{R} \\ n &\mapsto u(n) \end{aligned}$$

Le réel $u(n)$ est le **terme d'indice** n et est noté u_n .

Remarque I.1. (u_n) est une suite ; u_n est le **terme général** de la suite.

Exemple 2

À l'approche de Noël, un mini-sapin en pot vient d'être planté. Il mesure au départ 2 cm. Chaque semaine, il grandit de 0,5 cm.

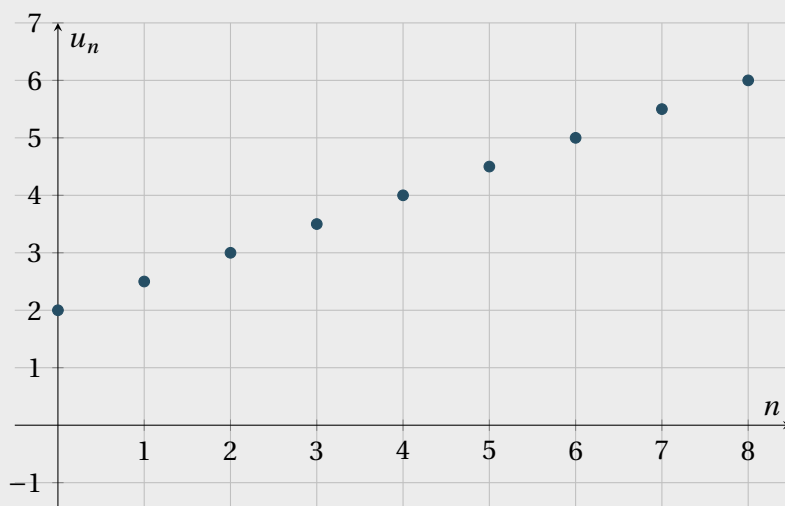
- Modéliser la situation avec une suite. On pose u_n la taille (en cm) après n semaines.
 $u_0 = 10$ et, pour tout n , $u_{n+1} = u_n + 0,5$.
- Calculer la hauteur du sapin au bout d'une semaine, deux semaines, quatre semaines, huit semaines.
 $u_1 = 10,5$, $u_2 = 11$, $u_3 = 11,5$, $u_4 = 12$, $u_5 = 12,5$.

Définition 3

La représentation graphique de la suite u est un **nuage de points** composé des points $(n; u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 4

Représenter graphiquement la suite de l'exemple précédent.



I.2 Suite définie de manière explicite

Définition 5

Une suite (u_n) est définie de manière **explicite** lorsque la suite est donnée en fonction de n : il existe une fonction f telle que :

$$u_n = f(n).$$

Remarque I.2. L'écriture explicite permet de calculer directement un terme de la suite.

Exemple 6

Soit la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{3n-3}{2(n-1)}$.

a) Calculer v_{10} . $v_{10} = \frac{3 \times 10 - 3}{2(10-1)} = \frac{27}{18} = \frac{3}{2}$.

b) Écrire v_{n+1} en fonction de n . $v_{n+1} = \frac{3(n+1)-3}{2((n+1)-1)} = \frac{3n}{2n} = \frac{3}{2}$ (pour $n \neq 0$).

I.3 Suite définie par une relation de récurrence

Définition 7

On définit une suite (u_n) de manière **récursive** (d'ordre 1) lorsque l'on connaît un des termes de la suite et une relation permettant de connaître u_{n+1} en fonction de u_n : il existe une fonction f telle que :

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

Remarque I.3. On aurait pu écrire $u_n = f(u_{n-1})$.

Exemple 8

Soit la suite (w_n) définie par

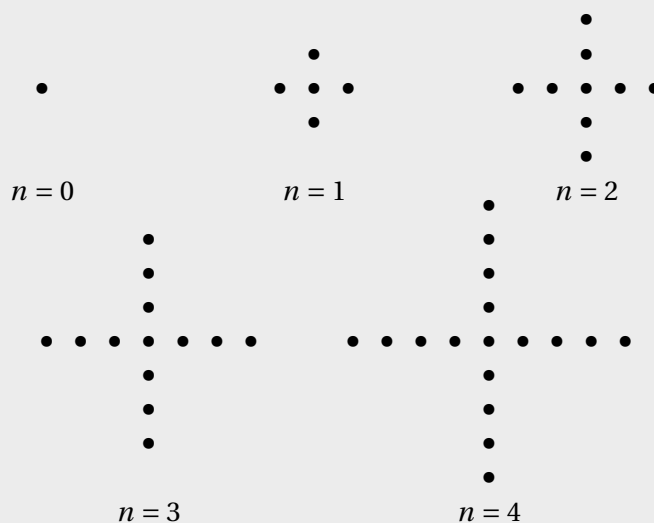
$$\begin{cases} w_1 = -3, \\ w_{n+1} = 3w_n - 8. \end{cases}$$

1. Calculer w_2 . $w_2 = 3 \times (-3) - 8 = -17$.

2. Calculer w_4 . $w_3 = 3 \times (-17) - 8 = -59$ puis $w_4 = 3 \times (-59) - 8 = -185$.

Exemple 9

On note B_n le nombre de points présents dans le n -ème schéma :



1. Déterminer B_0, B_1, B_2, B_3, B_4 . $B_0 = 1$, puis on ajoute 4 points à chaque fois : $B_1 = 5, B_2 = 9, B_3 = 13, B_4 = 17$.
2. Déterminer B_{n+1} en fonction de B_n . On obtient la relation de récurrence $B_{n+1} = B_n + 4$.

II Sens de variation**Définition 10**

Soit une suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- (u_n) est **croissante** $\Leftrightarrow u_{n+1} \geq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (u_n) est **décroissante** $\Leftrightarrow u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque II.1.

- Une suite qui est à la fois croissante et décroissante est dite **constante**.
- Une suite est dite **strictement** croissante (respectivement décroissante) si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$ (resp. $u_{n+1} < u_n$).
- **Méthode** : Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ permet de savoir si une suite est décroissante ou croissante.

Exemple 11

1. Déterminer les variations de la suite définie par $v_{n+1} = v_n + n^2$. On a $v_{n+1} - v_n = n^2 \geq 0$, donc la suite (v_n) est croissante.
2. Déterminer les variations de la suite définie par $w_n = 3n - 6$. Il s'agit d'une suite affine de raison $3 > 0$, donc (w_n) est croissante.

Propriété 12

Soit u une suite numérique dont tous les termes sont strictement positifs. Alors :

- (u_n) est croissante $\Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ pour tout n ,
- (u_n) est décroissante $\Leftrightarrow 0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ pour tout n ,

- (u_n) est constante $\Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ pour tout n .

Exemple 13

Soit la suite définie par

$$u_{n+1} = 3n \times u_n \quad \text{avec } u_1 = \frac{2}{9}.$$

Déterminer les variations de la suite (u_n) .

Pour $n \geq 1$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 3n > 1$, et tous les termes sont positifs, donc (u_n) est croissante.

Propriété 14

Soit une suite u définie de manière explicite : $u_n = f(n)$. Si f est une fonction monotone, alors la suite u a la même monotonie.

Remarque II.2. Une suite n'est pas forcément monotone. Par exemple, la suite définie par $u_n = (-1)^n$.

Exemple 15

Soit la suite (A_n) définie par $A_n = \sqrt{n}$. Déterminer les variations de la suite (A_n) .

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $[0, +\infty[$, donc la suite (A_n) est croissante.

III Limite d'une suite

C'est en terminale que ce paragraphe sera complet et rigoureux. On se contente ici d'une simple introduction.

Définition 16

« **Définition** » : Si les termes d'une suite (u_n) se rapprochent de plus en plus d'un certain réel ℓ , on dit que la suite (u_n) **converge vers** ℓ .

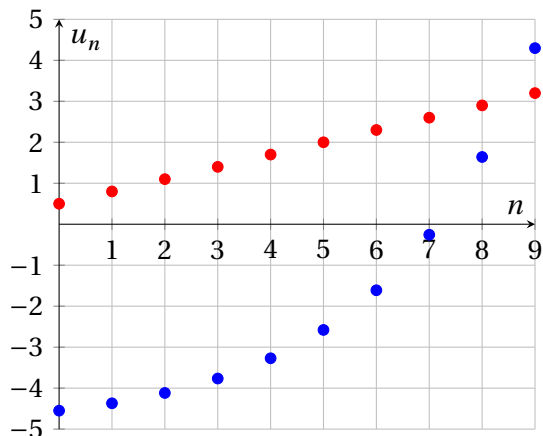
On dit alors que ℓ est la **limite** de la suite (u_n) .

Remarque III.1. * Une suite qui ne converge pas est dite **divergente**.

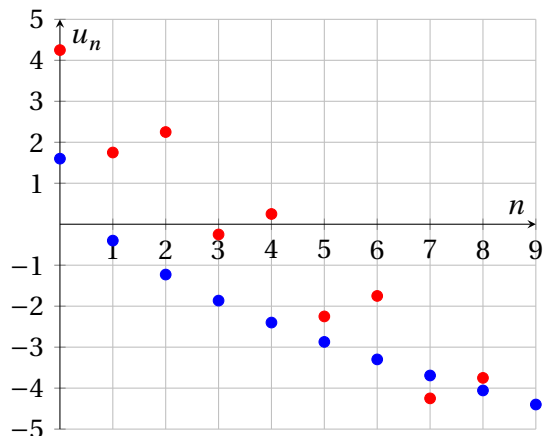
* Pour certaines suites divergentes, il est légitime de dire que leur limite est $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemple 17

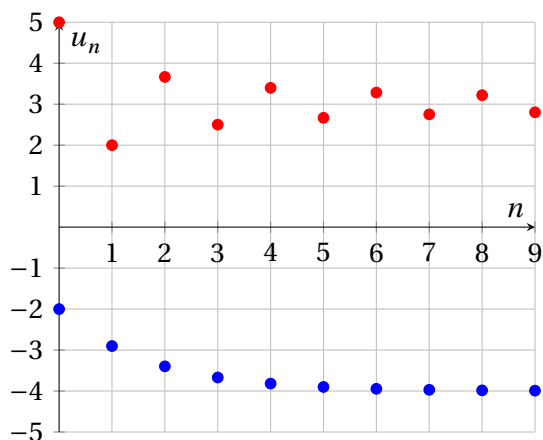
Voici les quatre situations possibles, avec deux exemples par situation :



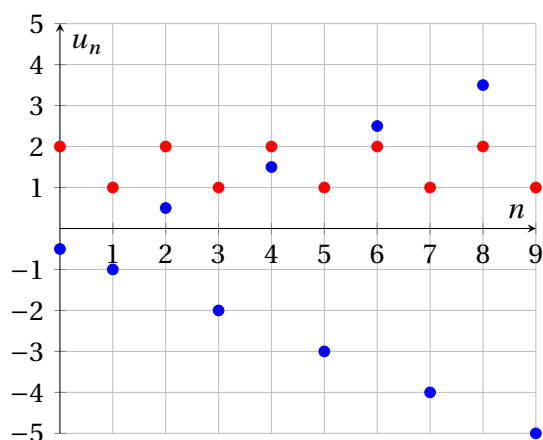
La suite rouge et la suite bleue semblent diverger, avec pour limite $+\infty$.



La suite rouge et la suite bleue semblent diverger, avec pour limite $-\infty$.



La suite rouge semble converger vers 3. La suite bleue semble converger vers -4 .



Les deux suites semblent diverger et ne pas avoir de limite, ni finie ni infinie.