NOMBRE DÉRIVÉ ET TANGENTE

Compétences travaillées : Calculer un taux de variation ; interpréter géométriquement un taux de variation ; déterminer si une fonction est dérivable en un réel a ; interpréter géométriquement le nombre dérivé ; déterminer une équation de tangente ; comprendre des cas de non-dérivabilité.

Dans tout ce chapitre, on considère f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, a et b deux réels distincts de I et h un réel non nul tel que $a+h \in \mathrm{I}$.

I Taux de variation d'une fonction

Définition 1

On appelle **taux de variation** (ou taux d'accroissement) de la fonction f entre a et b le nombre réel égal au quotient :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

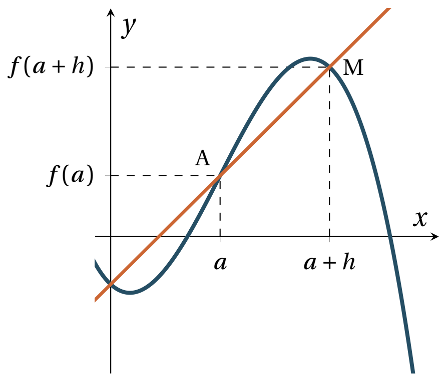
En pratique, on considère souvent $b = a+h$ et on note :

$$\tau_a(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Propriété 2

Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f.
Soient $\mathrm{A}\big(a; f(a)\big)$ et $\mathrm{M}\big(a+h; f(a+h)\big)$ deux points distincts de $\mathscr{C}_f$.

Le taux de variation $\tau_a(h)$ est égal au **coefficient directeur** de la sécante (AM).



Démonstration. Le coefficient directeur de la droite (AM) vaut :

$$\frac{y_\mathrm{M}-y_\mathrm{A}}{x_\mathrm{M}-x_\mathrm{A}} = \frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

□

Exemple 3 : Calculer un taux de variation

Soit f la fonction carrée définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

- Déterminer le taux de variation de f entre 1 et 2 :

$$\frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{4-1}{1} = 3.$$

- Déterminer le taux de variation de f entre 1 et $1+h$ (avec $h \neq 0$) :

$$\tau_1(h) = \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2-1}{h} = \frac{1+2h+h^2-1}{h} = \frac{2h+h^2}{h} = 2+h.$$

Exemple 4 : Un exemple « concret » en cinématique

La vitesse moyenne d'un objet en mouvement rectiligne entre les instants t_1 et t_2 est

$$v_m = \frac{\text{distance parcourue entre } t_1 \text{ et } t_2}{\text{durée écoulée entre } t_1 \text{ et } t_2} = \frac{d(t_2)-d(t_1)}{t_2-t_1}.$$

Si on pose $t_2 = t_1 + h$ (avec $h \neq 0$), il faut alors comprendre que la durée écoulée est h et on a :

$$v_m(h) = \frac{d(t_1+h)-d(t_1)}{h}.$$

II Vers la notion de limite en zéro

Exemple 5

On considère la fonction f définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{(x+1)^2-1}{x}.$$

L'image de 0 par f n'existe pas ; on s'intéresse donc aux valeurs de $f(x)$ lorsque x se rapproche de 0.

x	$-0{,}5$	$-0{,}1$	$-0{,}01$	$-0{,}001$	$\dots$	$0{,}001$	$0{,}01$	$0{,}1$	$0{,}5$	1
$f(x)$	1,5	1,9	1,99	1,999	?	2,001	2,01	2,1	2,5	3

On constate que $f(x)$ se rapproche de 2 lorsque x se rapproche de 0. On dit que la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 est égale à 2 et on note :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 2.$$

Attention : on ne peut pas écrire $f(0) = 2$!

Définition 6

On dit que $f(x)$ a pour limite ℓ lorsque x tend vers 0 si les valeurs de $f(x)$ peuvent être aussi proches de ℓ que l'on veut, pourvu que x soit suffisamment proche de 0.
On note :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \ell,$$

et on lit : « La limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 est égale à ℓ. »

III Nombre dérivé d'une fonction en un point

Définition 7

On dit que f est **dérivable en** a si le taux d'accroissement

$$\tau_a(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

tend vers un réel ℓ lorsque h tend vers 0.
Ce nombre ℓ, lorsqu'il existe, est appelé **nombre dérivé** de f en a et se note $f'(a)$.
On écrit alors

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a) = \ell.$$

Méthode 8 : Pour déterminer si une fonction est dérivable en a

1. Calculer $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ (avec $h \neq 0$).
2. Calculer la limite de l'expression obtenue lorsque h tend vers 0 ($h \to 0$).
3. Si cette limite existe et est finie, alors f est dérivable en a et cette limite est $f'(a)$.

Exemple 9

On considère la fonction carrée, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
Cette fonction est-elle dérivable en 1 ? Si oui, donner $f'(1)$.
Il faut calculer $\tau_1(h)$ puis sa limite quand h tend vers 0.

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2-1}{h} = \frac{1+2h+h^2-1}{h} = \frac{2h+h^2}{h} = 2+h.$$

Ainsi,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}(2+h) = 2.$$

Donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = 2$.

Exemple 10 : Un exemple « concret » en cinématique

La vitesse moyenne d'un objet en mouvement rectiligne entre les instants t_1 et t_2 est :

$$v_m = \frac{\text{distance parcourue entre } t_1 \text{ et } t_2}{\text{durée écoulée entre } t_1 \text{ et } t_2} = \frac{d(t_2)-d(t_1)}{t_2-t_1}.$$

Si on pose $t_2 = t_1 + h$ (avec $h \neq 0$), alors :

$$v_m(h) = \frac{d(t_1+h)-d(t_1)}{h}.$$

Si ce taux admet une limite lorsque $h \to 0$, alors la fonction $d(t)$ est dérivable en t_1 et le nombre dérivé $d'(t_1)$ est la vitesse instantanée à l'instant t_1.

IV Tangente à une courbe en un point

Dans toute la suite du cours, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f, on considère les points $A(a, f(a))$ et $M(a+h, f(a+h))$ de $\mathscr{C}_f$ et on suppose que f est dérivable en a (autrement dit $f'(a)$ existe).

IV.1 Faisceau de sécantes

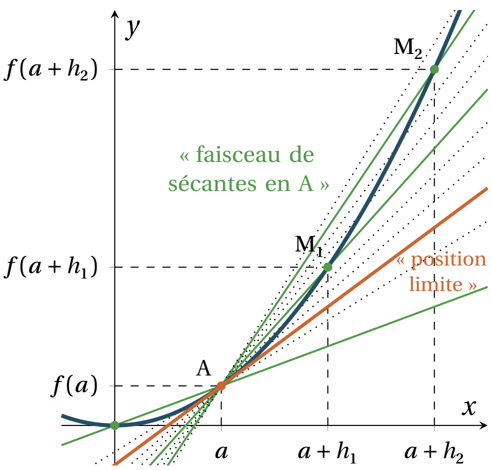
Définition 11

Soit la droite (AM) sécante à $\mathscr{C}_f$, de coefficient directeur :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Lorsque M décrit la courbe $\mathscr{C}_f$ (avec $M \neq A$), on obtient un **faisceau de sécantes** à $\mathscr{C}_f$ passant par A.

Lorsque M se rapproche de A, h tend vers 0 et les sécantes tendent vers une **position dite « limite »** : une droite de pente $f'(a)$.



IV.2 Tangente

Définition 12

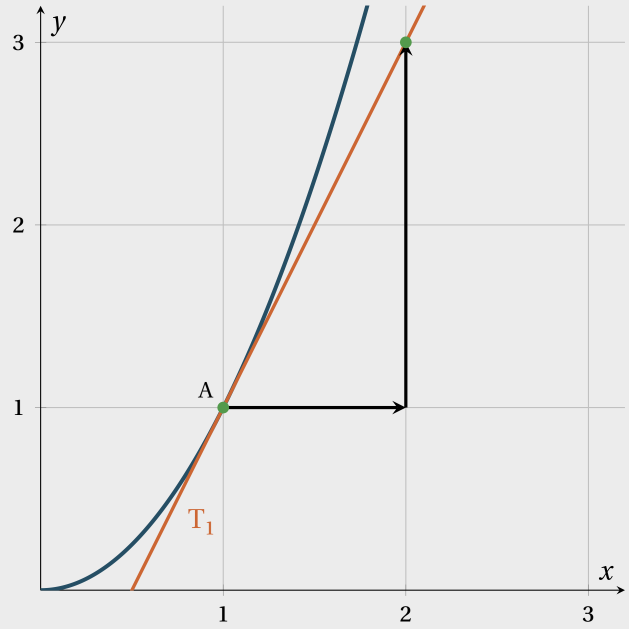
On appelle **tangente** T_a à la courbe représentative de f au point A d'abscisse a la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$.

Exemple 13

Dans l'exemple précédent, on a considéré la fonction carrée, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
On a montré que $f'(1) = 2$.

La **tangente** T_1 à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 1 est donc la **droite** qui passe par le point $A(1, f(1)) = A(1,1)$ et qui a pour **coefficient directeur** $f'(1) = 2$.

Ainsi, à partir du point A, lorsqu'on se déplace d'une unité vers la droite, on monte de 2 unités pour obtenir un second point de la tangente.



IV.3 Équation d'une tangente

Propriété 14

La courbe représentative de f admet au point $A(a, f(a))$ une tangente T_a d'équation :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Démonstration. La tangente au point d'abscisse a a pour coefficient directeur $f'(a)$.
Son équation est donc de la forme :

$$y = f'(a)x + p,$$

où p est l'ordonnée à l'origine.
Comme $A(a, f(a))$ appartient à cette tangente, on a :

$$f(a) = f'(a)a + p,$$

d'où $p = f(a) - f'(a)a$. On obtient donc :

$$y = f'(a)x + f(a) - f'(a)a \quad \Leftrightarrow \quad y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

□

Exemple 15

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction carrée au point d'abscisse 1.

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) = 2(x-1) + 1^2 = 2x - 1.$$

Remarque IV.1. Lorsque le nombre dérivé d'une fonction est nul en un réel a, alors la tangente à la courbe au point d'abscisse a est parallèle à l'axe des abscisses. La tangente est alors horizontale et d'équation $y = f(a)$.

V Nombre dérivé des fonctions usuelles

Exemple 16

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Calculons le nombre dérivé de f en un réel quelconque a.
Soit $h \neq 0$,

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2-a^2}{h} = \frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h} = \frac{2ah+h^2}{h} = 2a+h.$$

Or

$$\lim_{h\to 0}(2a+h) = 2a.$$

Ainsi, pour tout réel a, le nombre dérivé de f en a existe et

$$f'(a) = 2a.$$

On a (sur le même type de démonstration) les résultats suivants, à connaître.

Fonction	**Expression algébrique**	**Domaine de définition**	**Domaine de dérivabilité**	**Nombre dérivé** $f'(a)$
constante	$f(x) = k \quad (k \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(a) = 0$
identité	$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(a) = 1$
affine	$f(x) = mx + p$ $(m, p \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(a) = m$
carrée	$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(a) = 2a$
cube	$f(x) = x^3$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(a) = 3a^2$
puissance	$f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{Z}^*)$	$\mathbb{R}$ si $n > 0$ $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$	$\mathbb{R}$ si $n > 0$ $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$	$f'(a) = na^{n-1}$
inverse	$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(a) = -\frac{1}{a^2}$
racine carrée	$f(x) = \sqrt{x}$	$[0; +\infty[$	$]0; +\infty[$	$f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$
sinus	$f(x) = \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(a) = \cos(a)$
cosinus	$f(x) = \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(a) = -\sin(a)$

Remarque V.1. Voici certaines démonstrations à savoir refaire seul (elles sont du même type que pour la fonction carrée) :

- $f(x) = k$: $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{k-k}{h} = 0.$
- $f(x) = x$: $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)-a}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 1.$
- **Exercice :** démontrer l'expression du nombre dérivé pour les fonctions cube, inverse et racine carrée.

VI Comprendre le cas de non-dérivabilité à travers des exemples

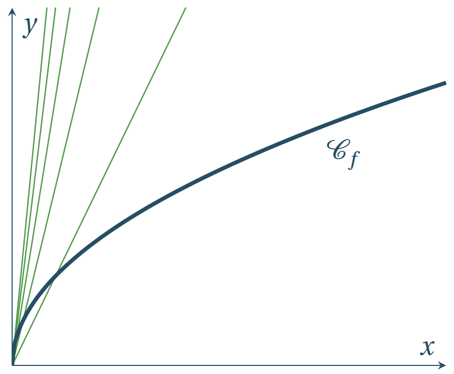
Propriété 17

La fonction racine carrée définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{x}$, est définie en 0, mais n'est pas dérivable en 0.

Démonstration.
On calcule le taux d'accroissement en 0 :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h}-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{h}}.$$

Or, lorsque h est très proche de 0 (avec $h > 0$), le réel $\dfrac{1}{\sqrt{h}}$ prend des valeurs très grandes sans se « stabiliser ».
On écrit $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$.
Ainsi, le taux de variation n'admet pas de limite **finie** lorsque h tend vers 0, donc f n'est pas dérivable en 0.



□

Propriété 18

La fonction valeur absolue définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = |x|$ est dérivable en tout réel sauf en 0.

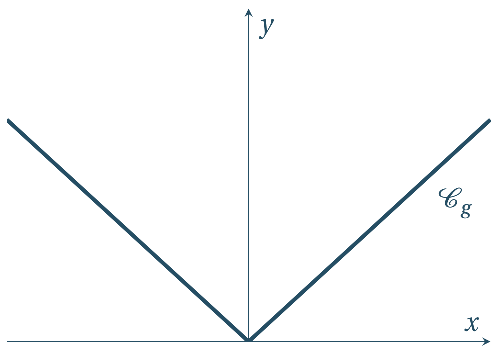
Démonstration.
On calcule le taux d'accroissement en 0 :

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(0+h)-g(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}.$$

Or cette expression dépend du signe de h :

$$\text{si } h > 0, \quad \frac{|h|}{h} = \frac{h}{h} = 1,$$
$$\text{si } h < 0, \quad \frac{|h|}{h} = \frac{-h}{h} = -1.$$

La limite n'étant pas unique, elle n'existe pas : la fonction g n'est pas dérivable en 0.
La courbe $\mathscr{C}_g$ n'admet pas de tangente au point d'abscisse 0.



□