PRODUIT SCALAIRE

Compétences travaillées : Calculer un produit scalaire à l'aide de plusieurs méthodes ; Utiliser le produit scalaire pour calculer des angles ou des longueurs ; Utiliser le produit scalaire pour résoudre un problème d'orthogonalité, ... ; Formules d'Al Kashi ; Ensemble des points M tel que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

I Définition, orthogonalité

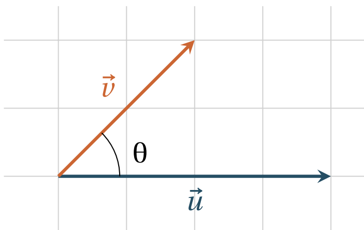
I.1 Définition avec le cosinus

Définition 1

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et on note $\theta = (\vec{u}, \vec{v})$ l'angle entre ces deux vecteurs.
On définit le **produit scalaire** par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\theta).$$

Si l'un des deux vecteurs est nul, on pose $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.



Remarque I.1. Le produit scalaire est un **nombre** (un réel), pas un vecteur.

I.2 Cas particuliers (colinéarité, carré scalaire)

Propriété 2

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|$.
- S'ils sont colinéaires et de sens contraire, $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|$.

Démonstration. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens, alors l'angle entre les deux vecteurs vaut $\theta = \dots$.
On en déduit donc :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos(\dots) = \dots\dots\dots$$

De la même façon, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraire, on a alors $\theta = \dots$ deg $= \dots$ rad.
Donc $\cos(\theta) = \dots$. □

Remarque I.2. On a donc $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$. On parle de **carré scalaire**.

Exemple 3 : Applications

Soient A, B et C trois points du plan.

1. On suppose $AB = 4$, $AC = 7$ et $\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{4}$. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

   ....

2. On suppose $AB = 2$, $AC = 5$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 5$. Déterminer $\widehat{BAC}$.

   ....

I.3 Caractérisation de l'orthogonalité

Propriété 4

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

Remarque I.3. Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

Démonstration. Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \cos(\theta) = \ldots \Leftrightarrow \theta = \ldots \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$. □

Exemple 5 : Dans un carré

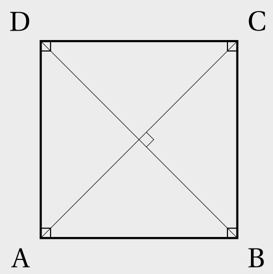
Soit un carré ABCD de côté c.

On sait que (AB) ⊥ (AD), donc :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0.$$

De même, on a :

$$\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{DB} = \cdots = 0.$$

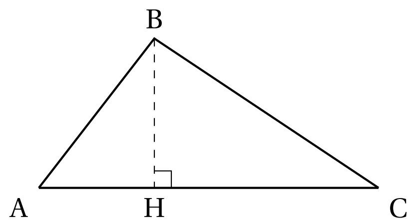


II Plusieurs expressions du produit scalaire

II.1 Avec un projeté orthogonal

Définition 6

Le **projeté orthogonal** d'un point B sur une droite (AC) est le point H ∈ (AC) tel que (BH) ⊥ (AC).



Remarque II.1. Le projeté orthogonal H est le point d'intersection entre la droite (AC) et la droite perpendiculaire à (AC) passant par B.
Il est le point de la droite (AC) le plus proche de B.

Propriété 7

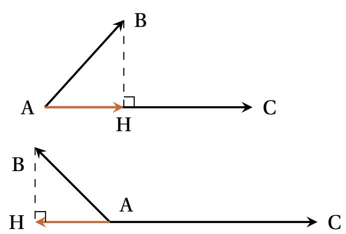
Si H est le projeté orthogonal de B sur (AC), alors :

- Si $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AC \times AH.$$

- Si $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens contraire :

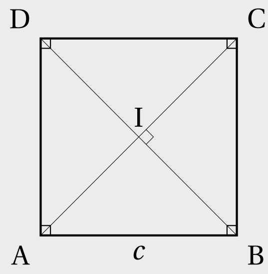
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AC \times AH.$$



Exemple 8 : Application : dans un carré

Soit un carré ABCD de côté c. On a :

- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \dots.$
- $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DI} = \dots.$
- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = \dots.$



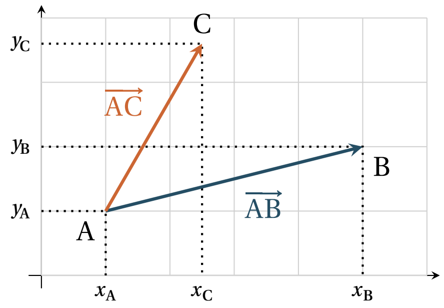
II.2 En repère orthonormé (coordonnées)

Dans cette section, on se place dans un repère orthonormé.

On considère les points $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ et $C(x_C; y_C)$.

On peut calculer les coordonnées des vecteurs de la façon suivante :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix}.$$



Définition 9

On rappelle la formule pour obtenir la longueur d'un segment (ou d'un vecteur) :

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Propriété 10

Si on connaît les coordonnées des vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = xx' + yy'.$$

Exemple 11

On considère les points $A(1;1)$, $B(5;-2)$, $C(6;-3)$ et $D(9;1)$.
Montrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

. . . .

. . . .

Exemple 12 : Application : calculer un angle

Soient $A(-1;2)$, $B(-3;1)$ et $C(1;-3)$ dans un repère orthonormé. On veut calculer $\widehat{BAC}$ à $0{,}1°$ près.

. . . .

. . . .

. . . .

II.3 Avec les normes

Propriété 13

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right).$$

En particulier, pour trois points A,B,C :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right).$$

Démonstration. On part de :

$$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2(\vec{u}\cdot\vec{v}) + \|\vec{v}\|^2,$$

puis on isole $\vec{u}\cdot\vec{v}$. Ensuite,

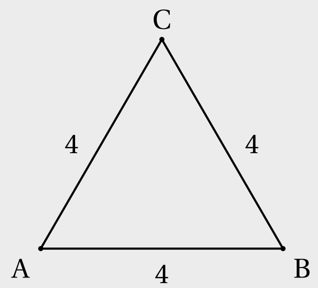
$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 4(\vec{u}\cdot\vec{v}).$$

□

Exemple 14 : Application : triangle équilatéral

Soit ABC un triangle équilatéral de côté 4. On veut calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

. . . .



III Propriétés calculatoires et applications

III.1 Symétrie et bilinéarité

Propriété 15

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et tout réel k :

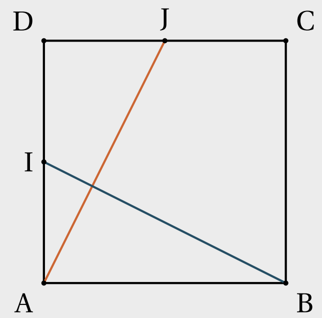
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$.
- $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$.
- $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\vec{w}$.
- $k(\vec{u}\cdot\vec{v}) = (k\vec{u})\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot(k\vec{v})$.

III.2 Un classique : prouver une perpendicularité (carré)

Exemple 16 : Carré, milieux, Chasles

ABCD est un carré de côté a.
I est le milieu de [AD] et J est le milieu de [CD].

On veut prouver (AJ) $\perp$ (BI).



. . . .

. . . .

. . . .

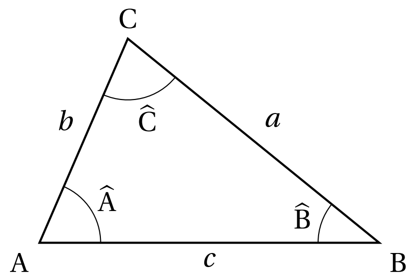
version-eleve

III.3 Formules d'Al-Kashi

Propriété 17

Dans un triangle ABC, avec AB = c, BC = a et CA = b :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{A}),$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\widehat{B}),$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\widehat{C}).$$



. . . .

. . . .

Exemple 18 : Application

Dans le triangle DEF, DE = 4, DF = 7 et $\widehat{D} = 60°$.

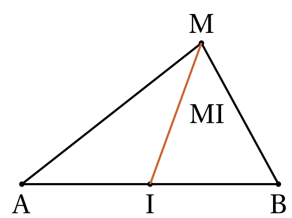
. . . .

III.4 Théorème de la médiane, cercle, centre de gravité

Propriété 19

Soient A et B deux points distincts et I le milieu de [AB]. Pour tout point M :

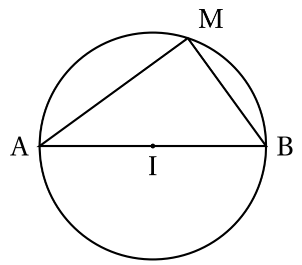
$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}.$$



. . . .

Propriété 20

$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \iff$ M appartient au cercle de diamètre [AB].



Définition 21

On appelle **centre de gravité** d'un triangle ABC l'unique point G tel que :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

Propriété 22

Les médianes d'un triangle sont concourantes en G.
De plus, si A′ est le milieu de [BC], alors :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}.$$