

VARIABLES ALÉATOIRES

Compétences travaillées :

Variable aléatoire réelle; modélisation du résultat numérique d'une expérience aléatoire; formalisation comme fonction définie sur l'univers et à valeurs réelles; Loi d'une variable aléatoire; Espérance, variance, écart type d'une variable aléatoire.

I Variable aléatoire et loi de probabilité

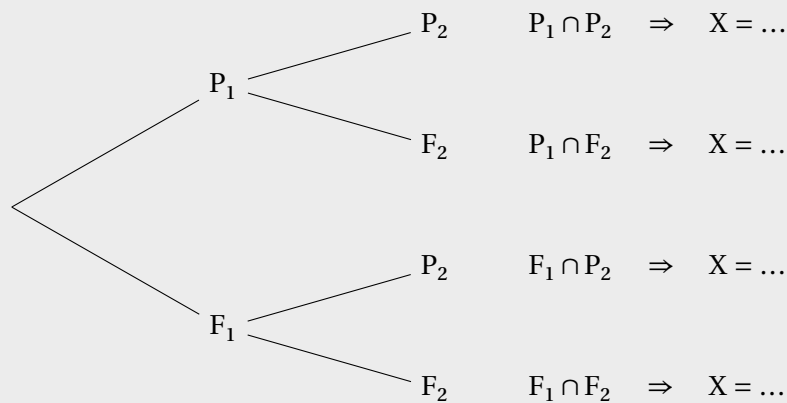
I.1 Découverte sur un exemple

Exemple 1 : Jeu de pile ou face

On lance deux fois de suite une pièce équilibrée.

Chaque **face** fait gagner 2 euros et chaque **pile** fait perdre 1 euro.

On note X la variable aléatoire qui associe à chaque issue le gain algébrique du joueur.



On en déduit que X prend les valeurs

I.2 Définition

Définition 2 : Univers, évènements

L'ensemble de toutes les **issues** d'une expérience aléatoire est l'**univers** des éventualités. On le note souvent Ω .

Un **évènement élémentaire** est un évènement contenant une seule issue.

Un **évènement** de cette expérience est un sous-ensemble de l'univers Ω . Il est composé d'une ou plusieurs issues.

Exemple 3

Si on lance un dé cubique, alors l'univers est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

On peut s'intéresser à l'évènement élémentaire A : « obtenir le chiffre 6 », dans ce cas on a $A = \{6\}$.

On peut également étudier l'évènement B : « obtenir un chiffre impair », et on a alors $B = \{1, 3, 5\}$.

Définition 4

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire.

Une **variable aléatoire** est une fonction, souvent notée X , qui à chaque issue de Ω associe un unique nombre réel. Autrement dit, une variable aléatoire est une **fonction définie sur Ω à valeurs dans \mathbb{R}** .

Remarque I.1.

- Une variable aléatoire est en général notée par une lettre majuscule : X, Y, Z, ...
- Cette année, on travaille avec des variables aléatoires **discrètes**, c'est-à-dire prenant un nombre fini de valeurs.

Définition 5

Si X est une variable aléatoire et si x_i est l'une de ses valeurs, l'évènement

$$X = x_i$$

désigne l'ensemble des issues pour lesquelles la variable aléatoire prend la valeur x_i .
Sa probabilité se note $P(X = x_i)$.

I.3 Loi de probabilité**Définition 6**

Soit X une variable aléatoire discrète prenant les valeurs x_1, x_2, \dots, x_n .

Donner la **loi de probabilité** de X, c'est associer à chaque valeur x_i la probabilité $P(X = x_i)$.

On résume généralement cette loi dans un tableau :

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

Propriété 7

Dans le tableau donnant la loi de probabilité d'une variable aléatoire, la somme des probabilités vaut 1 :

$$P(X = x_1) + P(X = x_2) + \dots + P(X = x_n) = 1.$$

Exemple 8 : Loi de probabilité du jeu précédent

On reprend le jeu de pile ou face de l'exemple 1. On a :

- $P(X = -2) = \dots = \dots$
- $P(X = 1) = \dots = \dots$
- $P(X = 4) = \dots = \dots$

On obtient donc :

x_i	-2	1	4
$P(X = x_i)$

I.4 Autres évènements associés à une variable aléatoire

Définition 9

Si X est une variable aléatoire discrète prenant les valeurs x_1, x_2, \dots, x_n , l'évènement

$$X \geq x_i$$

désigne l'ensemble des issues pour lesquelles la variable aléatoire prend une valeur supérieure ou égale à x_i .

Propriété 10

Si X prend les valeurs $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, alors :

$$P(X \geq x_i) = P(X = x_i) + P(X = x_{i+1}) + \dots + P(X = x_n).$$

Remarque I.2. De manière analogue, on peut définir les évènements $X > x_i$, $X \leq x_i$ et $X < x_i$.

Exemple 11 : Toujours avec le jeu de pile ou face

On reprend la loi précédente.

- $P(X \geq 1) = P(X = 1) + P(X = 4) = \dots$
- $P(X < 1) = P(X = -2) = \dots$

Exemple 12 : Autre exemple : une urne

Dans une urne opaque, on place 2 boules vertes, 3 boules rouges et 5 boules bleues, indiscernables au toucher.

On tire une boule au hasard :

- si elle est rouge, on gagne 2 euros;
- si elle est bleue, on perd 3 euros;
- si elle est verte, on gagne 5 euros.

On note X le gain algébrique du joueur.

Alors :

$$X \in \dots\dots\dots$$

et

$$P(X = -3) = \dots, \quad P(X = 2) = \dots, \quad P(X = 5) = \dots$$

De plus :

$$P(X = 0) = \dots \quad \text{et} \quad P(X < 4) = \dots$$

II Espérance, variance et écart type

II.1 Définition de l'espérance

Définition 13

Soit X une variable aléatoire discrète prenant les valeurs x_1, x_2, \dots, x_n avec les probabilités p_1, p_2, \dots, p_n . On appelle **espérance** de X le nombre noté $E(X)$ défini par :

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i.$$

Remarque II.1. L'espérance s'interprète comme la valeur moyenne prise par la variable aléatoire lorsque l'expérience est répétée un grand nombre de fois.

Propriété 14

Lorsque X représente le gain algébrique d'un joueur :

- si $E(X) > 0$, le jeu est **favorable au joueur** ;
- si $E(X) < 0$, le jeu est **défavorable au joueur** ;
- si $E(X) = 0$, le jeu est **équitable**.

Exemple 15 : Espérance du jeu de pile ou face

On reprend la loi :

x_i	-2	1	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Alors :

$$E(X) = (-2) \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{4} = \dots$$

Interprétation :

.....

II.2 Variance et écart type**Définition 16**

Soit X une variable aléatoire discrète prenant les valeurs x_1, x_2, \dots, x_n avec les probabilités p_1, p_2, \dots, p_n .

- La **variance** de X est le nombre

$$V(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 + \dots + p_n(x_n - E(X))^2.$$

- L'**écart type** de X est le nombre réel

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Remarque II.2.

- La variance mesure la moyenne des carrés des écarts à l'espérance.
- L'écart type mesure la dispersion des valeurs autour de l'espérance.
- Plus l'écart type est grand, plus les valeurs prises par la variable aléatoire sont dispersées.

Propriété 17 : Formule de König-Huygens

On a :

$$V(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - (E(X))^2.$$

Exemple 18 : Variance et écart type du jeu de pile ou face

On a déjà trouvé $E(X) = 1$.

Donc :

$$V(X) = \frac{1}{4}(-2-1)^2 + \frac{1}{2}(1-1)^2 + \frac{1}{4}(4-1)^2 = \dots$$

Puis :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \dots$$

III Transformation affine d'une variable aléatoire**III.1 Définition****Définition 19**

Soit X une variable aléatoire de loi $(x_i; p_i)$ et soient a et b deux réels.
On définit la variable aléatoire $Y = aX + b$ en posant :

$$y_i = ax_i + b$$

pour chaque valeur x_i de X .

La loi de probabilité de Y est alors $(y_i; p_i)$.

Propriété 20

Soient a et b deux réels. Alors :

$$E(aX + b) = aE(X) + b, \quad V(aX + b) = a^2V(X), \quad \sigma(aX + b) = |a|\sigma(X).$$

Exemple 21 : Nouvelle règle du jeu

On reprend le jeu de pile ou face étudié précédemment.

On change les règles : les gains et pertes sont doublés, puis on impose une mise d'entrée de 1 euro.

Si X désigne le gain algébrique de l'ancien jeu, le nouveau gain est donné par :

$$Y = 2X - 1.$$

Comme X prend les valeurs $-2, 1$ et 4 , on obtient :

$$Y \in \dots\dots\dots$$

La loi de Y est donc :

y_i	-5	1	7
$P(Y = y_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Et ses paramètres sont :

$$E(Y) = E(2X - 1) = \dots,$$

$$V(Y) = V(2X - 1) = \dots,$$

$$\sigma(Y) = \sigma(2X - 1) = \dots$$

Remarque III.1. L'espérance est inchangée dans cet exemple, mais l'écart type est plus grand : les gains sont donc davantage dispersés.