

# FONCTION DÉRIVÉE

## Compétences travaillées :

Fonction dérivée; dérivées des fonctions usuelles; opérations sur les fonctions dérivables : somme, produit, inverse, quotient, fonction dérivée de  $x \mapsto g(ax + b)$ ; lien entre le sens de variation d'une fonction dérivable sur un intervalle et le signe de sa fonction dérivée; caractérisation des fonctions constantes; recherche d'extremums.

Dans toute la suite du cours,  $I$  désigne un intervalle ou une réunion d'intervalles de  $\mathbb{R}$ .

## I Fonction dérivée

### I.1 Définition

#### Exemple 1 : Exemple introductif

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2$ .

Dans le chapitre sur le nombre dérivé, on a vu que, pour tout réel  $a$ ,

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = 2a.$$

On dit donc que la fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

On définit alors sur  $\mathbb{R}$  la fonction  $f'$  par :

$$f'(x) = 2x.$$

Cette fonction s'appelle la **fonction dérivée** de  $f$ .

#### Définition 2

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ .

Dire que  $f$  est **dérivable sur**  $I$  signifie que le nombre dérivé  $f'(a)$  existe pour tout réel  $a$  de  $I$ .

Dans ce cas, la fonction qui, à tout réel  $x$  de  $I$ , associe le nombre dérivé  $f'(x)$  est appelée **fonction dérivée** de  $f$ , ou **dérivée** de  $f$ .

**Remarque I.1.** L'ensemble sur lequel est définie la fonction dérivée s'appelle l'**ensemble de dérivabilité**.

## I.2 Fonctions usuelles

### Propriété 3

Les fonctions usuelles suivantes sont à connaître :

Fonction	Expression algébrique	Domaine de dérivabilité	Fonction dérivée
Constante	$f(x) = k$ , avec $k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
Identité	$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$
Affine	$f(x) = mx + p$ , avec $m, p \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = m$
Carrée	$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
Cube	$f(x) = x^3$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 3x^2$
Puissance	$f(x) = x^n$ , avec $n \in \mathbb{Z}$	$\mathbb{R}$ si $n \geq 0$ , $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$	$f'(x) = nx^{n-1}$
Inverse	$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
Racine carrée	$f(x) = \sqrt{x}$	$]0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

**Remarque I.2.** La fonction racine carrée possède un domaine de dérivabilité différent de son domaine de définition.

### Exemple 4

- Si  $f(x) = 5$ , alors  $f'(x) = \dots$
- Si  $f(x) = -2x + 3$ , alors  $f'(x) = \dots$
- Si  $f(x) = x^4$ , alors  $f'(x) = \dots$
- Si  $f(x) = \frac{4}{x^4}$ , alors  $f'(x) = \dots$

## II Opérations sur les dérivées

### II.1 Somme et produit par un réel

#### Propriété 5

Si  $f(x) = u(x) + v(x)$  où  $u$  et  $v$  sont dérivables sur  $I$ , alors  $f$  est dérivable sur  $I$  et :

$$f'(x) = u'(x) + v'(x).$$

On note plus simplement :

$$(u + v)' = u' + v'.$$

Par analogie :

$$(u - v)' = u' - v'.$$

*Démonstration.* On cherche à déterminer la dérivée de la fonction  $f(x) = u(x) + v(x)$ .

Pour  $h \neq 0$ , on a :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{u(a+h) + v(a+h) - u(a) - v(a)}{h} = \frac{u(a+h) - u(a)}{h} + \frac{v(a+h) - v(a)}{h}.$$

Lorsque  $h$  tend vers 0, on obtient :

$$(u + v)'(a) = u'(a) + v'(a).$$

**Propriété 6**

Si  $f(x) = ku(x)$ , où  $k$  est un réel et  $u$  est dérivable sur  $I$ , alors  $f$  est dérivable sur  $I$  et :

$$f'(x) = ku'(x).$$

On note plus simplement :

$$(ku)' = ku'.$$

**Exemple 7**

- Soit  $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$  définie sur  $\mathbb{R}^*$ .

$f$  est la somme de deux fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}^*$ , donc  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  et

$$f'(x) = \dots$$

- Soit  $g(x) = -4x^2$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

$g$  est de la forme  $ku$  avec  $k = -4$  et  $u(x) = x^2$ , donc  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et

$$g'(x) = \dots$$

- Soit  $h(x) = 3x^2 - 5x + 1$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

$h$  est la somme de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ , donc  $h$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et

$$h'(x) = \dots$$

**II.2 Produit****Propriété 8**

Si  $f(x) = u(x)v(x)$  où  $u$  et  $v$  sont dérivables sur  $I$ , alors  $f$  est dérivable sur  $I$  et :

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

On note plus simplement :

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

**Remarque II.1.** Attention au piège : la dérivée d'un produit  $(uv)'$  n'est pas égale au produit des dérivées  $u'v'$ .

**Exemple 9**

Soit  $f(x) = (-5x + 2)(3x^2 - 1)$ .

$f$  est de la forme  $uv$  avec  $u(x) = -5x + 2$  et  $v(x) = 3x^2 - 1$ , deux fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

Donc  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et :

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Ainsi :

$$f'(x) = \dots$$

$$f'(x) = \dots$$

### II.3 Inverse et quotient

#### Propriété 10

Si  $f(x) = \frac{1}{u(x)}$ , où  $u$  est dérivable sur  $I$  et ne s'annule pas sur  $I$ , alors  $f$  est dérivable sur  $I$  et :

$$f'(x) = -\frac{u'(x)}{(u(x))^2}.$$

On note plus simplement :

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}.$$

**Remarque II.2.** Attention au piège : la dérivée de  $\frac{1}{u}$  n'est pas égale à l'inverse de  $u'$ .

#### Propriété 11

Si  $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ , où  $u$  et  $v$  sont deux fonctions dérivables sur  $I$  et si  $v(x) \neq 0$  pour tout  $x$  de  $I$ , alors  $f$  est dérivable sur  $I$  et :

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}.$$

On note plus simplement :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

**Remarque II.3.** Attention au piège : la dérivée d'un quotient  $\left(\frac{u}{v}\right)'$  n'est pas égale au quotient des dérivées.

#### Exemple 12

- Soit  $f(x) = \frac{1}{2x^2 - 8}$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$ .

$f$  est de la forme  $\frac{1}{u}$  avec  $u(x) = 2x^2 - 8$ , dérivable et non nulle sur  $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$ .

Donc  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$  et

$$f'(x) = \dots$$

- Soit  $g(x) = \frac{3 - x^2}{5x + 4}$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{4}{5}\right\}$ .

On pose  $u(x) = 3 - x^2$  et  $v(x) = 5x + 4$ .

Alors  $u'(x) = -2x$  et  $v'(x) = 5$ , donc :

$$g'(x) = \dots$$

$$g'(x) = \dots$$

## II.4 Fonctions composées usuelles

### Propriété 13

Si  $f$  est une fonction de la forme  $(u(x))^n$ , où  $u$  est dérivable sur  $I$  et  $n$  est un entier naturel, alors  $f$  est dérivable sur  $I$  et :

$$f'(x) = nu'(x)(u(x))^{n-1}.$$

On note plus simplement :

$$(u^n)' = nu'u^{n-1}.$$

### Propriété 14

Si  $f$  est une fonction de la forme  $\sqrt{u(x)}$ , où  $u$  est strictement positive et dérivable sur  $I$ , alors  $f$  est dérivable sur  $I$  et :

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}.$$

On note plus simplement :

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

### Propriété 15

Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que, pour tout  $x$  d'un intervalle  $I$ ,  $ax + b$  appartienne à un intervalle  $J$ .

Soit  $g$  une fonction dérivable sur  $J$ .

Si  $f$  est définie par  $f(x) = g(ax + b)$ , alors  $f$  est dérivable sur  $I$  et :

$$f'(x) = ag'(ax + b).$$

### Exemple 16

- Soit  $f(x) = (-4x + 2)^3$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

$f$  est de la forme  $u^n$  avec  $u(x) = -4x + 2$  et  $n = 3$ , donc  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et

$$f'(x) = \dots$$

- Soit  $g(x) = \sqrt{3x^2 - 1}$  définie sur  $I = ]-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}[ \cup ]\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty[$ .

$g$  est de la forme  $\sqrt{u(x)}$  avec  $u(x) = 3x^2 - 1$ , strictement positive et dérivable sur  $I$ .

Donc  $g$  est dérivable sur  $I$  et :

$$g'(x) = \dots$$

- Soit  $h(x) = \sqrt{2x - 7}$ .

La fonction racine carrée n'est dérivable que lorsque le terme sous la racine est strictement positif, donc ici lorsque  $2x - 7 > 0$ , c'est-à-dire pour  $x > 3,5$ .

On note  $\varphi(x) = \sqrt{x}$ . Alors  $h(x) = \varphi(2x - 7)$ , donc

$$h'(x) = \dots$$

pour tout  $x > 3,5$ .

### III Variations et extremums

#### III.1 Lien entre dérivée et variations

##### Propriété 17

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ .

- $f$  est croissante sur  $I$  si et seulement si, pour tout réel  $x$  de  $I$ ,  $f'(x) \geq 0$ .
- $f$  est décroissante sur  $I$  si et seulement si, pour tout réel  $x$  de  $I$ ,  $f'(x) \leq 0$ .
- $f$  est constante sur  $I$  si et seulement si, pour tout réel  $x$  de  $I$ ,  $f'(x) = 0$ .

**Remarque III.1.** Avec des inégalités strictes, on dira alors **strictement croissante** ou **strictement décroissante**.

##### Méthode 18 : Étudier les variations d'une fonction

- On détermine la dérivée  $f'$  de  $f$ .
- On étudie le signe de  $f'$  que l'on résume dans un tableau de signe.
- On applique la propriété précédente.
- On dresse le tableau de variations de  $f$ .

#### III.2 Exemples

##### Exemple 19

Soit  $h(x) = x^2 - 3x$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

$h$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et

$$h'(x) = \dots$$

On obtient alors le tableau suivant :

$x$	$-\infty$		1,5		$+\infty$
Signe de $h'(x)$		-	0	+	
Variations de $h$		↘		↗	
			-2,25		

On dit que  $h$  admet un **minimum global**  $-2,25$  atteint en  $1,5$ .

**Exemple 20**

Soit  $f(x) = x^3 + 4,5x^2 - 12x + 5$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

$f$  est une fonction polynôme de degré 3, donc elle est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et

$$f'(x) = \dots$$

Pour étudier le signe de  $f'$ , on calcule le discriminant :

$$\Delta = \dots$$

$f'$  possède donc deux racines :

$$x_1 = \dots \quad \text{et} \quad x_2 = \dots$$

Comme le coefficient dominant vaut  $3 > 0$ ,  $f'$  est positive à l'extérieur des racines et négative entre elles.

$x$	$-\infty$		$-4$		$1$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	$0$	$-$	$0$	$+$	
Variations de $f$		↗ <b>61</b> ↘			↘ <b>-1,5</b> ↗		

- On dit que 61 est un **maximum local** sur  $] -\infty; 1]$  et  $-1,5$  un **minimum local** sur  $[-4; +\infty[$ ;
- Il n'y a pas de **maximum ou minimum global** sur  $\mathbb{R}$ .