

# SUITES ARITHMÉTIQUES ET GÉOMÉTRIQUES

## Compétences travaillées :

Reconnaître une suite arithmétique ou géométrique ; déterminer sa raison ; passer d'une forme récurrente à une forme explicite ; représenter graphiquement une suite ; étudier ses variations ; calculer une somme de termes consécutifs.

## I Suites arithmétiques

### I.1 Définition et premiers exemples

#### Définition 1

Soit  $(u_n)$  une suite de réels et  $r$  un réel.

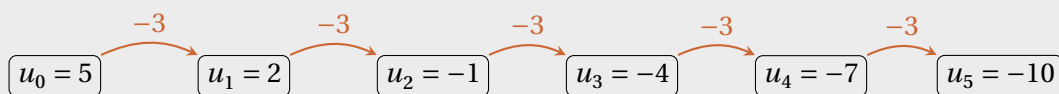
On dit que la suite  $(u_n)$  est **arithmétique de raison  $r$**  lorsque, pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

Autrement dit, pour passer d'un terme au suivant, on **ajoute toujours le même nombre**.

#### Exemple 2 : Une suite arithmétique

La suite arithmétique de premier terme  $u_0 = 5$  et de raison  $r = -3$  commence ainsi :



#### Remarque I.1.

Une suite est arithmétique lorsque la **différence entre deux termes consécutifs est constante**.

Ainsi, si tous les termes sont connus et si  $u_{n+1} - u_n$  garde toujours la même valeur, alors la suite est arithmétique.

#### Méthode 3 : Montrer qu'une suite est arithmétique

Pour montrer qu'une suite  $(u_n)$  est arithmétique, on peut :

- reconnaître directement une relation du type  $u_{n+1} = u_n + r$  ;
- calculer  $u_{n+1} - u_n$  et vérifier que cette différence est un réel constant, indépendant de  $n$ .

#### Exemple 4 : Reconnaître une suite arithmétique

On considère la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :

$$u_n = 3n + 5.$$

Pour savoir si  $(u_n)$  est arithmétique, on calcule :

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} - u_n &= 3(n+1) + 5 - (3n + 5) \\
 &= 3n + 3 + 5 - 3n - 5 \\
 &= 3.
 \end{aligned}$$

La différence est constante, donc la suite  $(u_n)$  est **arithmétique de raison 3**.

**Exemple 5 : Un contre-exemple**

On considère la suite  $(v_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :

$$v_n = n^2 + 1.$$

On calcule quelques termes :

$$v_0 = 1, \quad v_1 = 2, \quad v_2 = 5.$$

Ainsi :

$$v_1 - v_0 = 1 \quad \text{et} \quad v_2 - v_1 = 3.$$

Les différences ne sont pas constantes. La suite  $(v_n)$  n'est donc **pas arithmétique**.

**I.2 Forme explicite d'une suite arithmétique****Propriété 6**

Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique de raison  $r$ .

Pour tous entiers naturels  $p$  et  $n$ , on a :

$$u_n = u_p + (n - p)r.$$

En particulier, lorsque le premier terme est  $u_0$ , on a :

$$u_n = u_0 + nr.$$

*Démonstration.* Si  $p \leq n$ , pour passer de  $u_p$  à  $u_n$ , on ajoute  $r$  exactement  $n - p$  fois.

On obtient donc :

$$u_n = u_p + (n - p)r.$$

En prenant  $p = 0$ , on obtient  $u_n = u_0 + nr$ . □

**Exemple 7 : Retrouver la raison puis le terme général**

On considère une suite arithmétique  $(u_n)$  telle que  $u_2 = 13$  et  $u_6 = 18$ .

Les deux termes sont séparés de 4 rangs, donc :

$$r = \frac{u_6 - u_2}{6 - 2} = \frac{18 - 13}{4} = \frac{5}{4}.$$

De plus :

$$u_0 = u_2 - 2r = 13 - 2 \times \frac{5}{4} = \frac{21}{2}.$$

Ainsi, pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_n = \frac{21}{2} + \frac{5}{4}n.$$

**Exemple 8 : Une situation d'intérêts simples**

On place 1 000 euros avec des intérêts simples de 5% par an.

Chaque année, le capital augmente de 5% du capital initial, c'est-à-dire de :

$$1\,000 \times 0,05 = 50.$$

Si  $u_n$  désigne le capital au bout de  $n$  années, alors :

$$u_0 = 1\,000 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n + 50.$$

La suite  $(u_n)$  est donc arithmétique de raison 50.

### I.3 Représentation graphique et variations

#### Propriété 9

La représentation graphique d'une suite arithmétique est un **nuage de points alignés**.

*Démonstration.* Si  $(u_n)$  est arithmétique de premier terme  $u_0$  et de raison  $r$ , alors :

$$u_n = u_0 + nr.$$

Les points  $M_n(n; u_n)$  sont donc situés sur la droite d'équation :

$$y = u_0 + rx.$$

□

#### Propriété 10

Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique de raison  $r$ .

- Si  $r > 0$ , alors  $(u_n)$  est strictement croissante.
- Si  $r < 0$ , alors  $(u_n)$  est strictement décroissante.
- Si  $r = 0$ , alors  $(u_n)$  est constante.

*Démonstration.* Pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$u_{n+1} - u_n = r.$$

Les variations de la suite dépendent donc du signe de  $r$ .

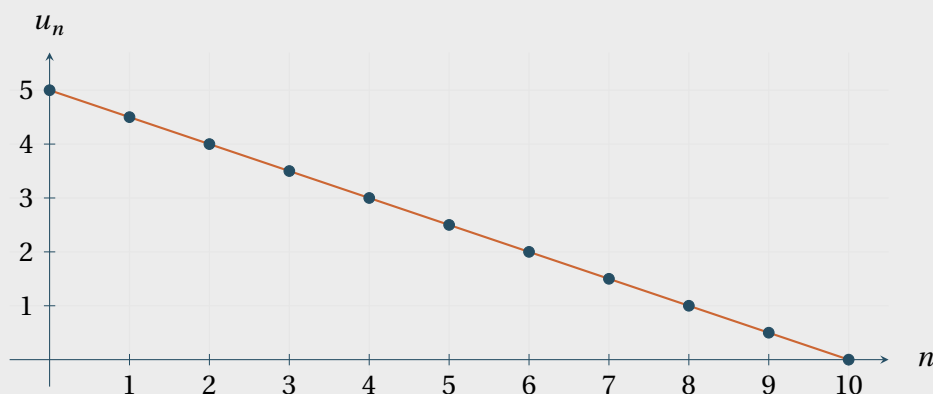
□

#### Exemple 11 : Représentation graphique

On considère la suite définie par :

$$u_0 = 5 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n - \frac{1}{2}.$$

Cette suite est arithmétique de raison  $-\frac{1}{2}$ , donc elle est **strictement décroissante**.



### I.4 Somme de termes consécutifs

**Propriété 12**

Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on a :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

*Démonstration.* On note  $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$ . On écrit la somme dans les deux sens :

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n, \\ S &= n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1. \end{aligned}$$

En additionnant les deux lignes, on obtient  $n$  fois le nombre  $n+1$  :

$$2S = n(n+1).$$

Donc :

$$S = \frac{n(n+1)}{2}.$$

□

**Propriété 13**

Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique.

La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale à :

$$\text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}.$$

En particulier :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}.$$

**Exemple 14 : Calculer une somme arithmétique**

On veut calculer :

$$S = 6 + 10 + 14 + \cdots + 98.$$

On remarque que  $S$  est la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 4.

Ici, le premier terme est 6, le dernier terme est 98, et le nombre de termes est :

$$\frac{98 - 6}{4} + 1 = 24.$$

Donc :

$$S = 24 \times \frac{6 + 98}{2} = 1\,248.$$

## II Suites géométriques

### II.1 Définition et premiers exemples

**Définition 15**

Soit  $(u_n)$  une suite de réels et  $q$  un réel non nul.

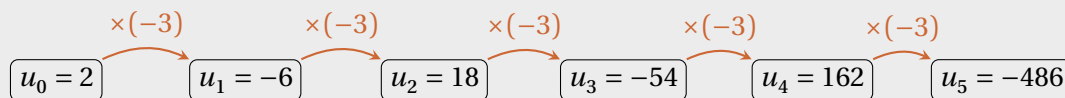
On dit que la suite  $(u_n)$  est **géométrique de raison**  $q$  lorsque, pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$u_{n+1} = q \times u_n.$$

Autrement dit, pour passer d'un terme au suivant, on **multiplie toujours par le même nombre**.

### Exemple 16 : Une suite géométrique

La suite géométrique de premier terme  $u_0 = 2$  et de raison  $q = -3$  commence ainsi :



### Remarque II.1.

Lorsque tous les termes de la suite sont non nuls, une suite est géométrique lorsque le **quotient entre deux termes consécutifs est constant** :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = q.$$

### Méthode 17 : Montrer qu'une suite est géométrique

Pour montrer qu'une suite  $(u_n)$  est géométrique, on peut :

- reconnaître directement une relation du type  $u_{n+1} = qu_n$  ;
- calculer  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ , lorsque les termes sont non nuls, et vérifier que ce quotient est constant.

### Exemple 18 : Reconnaître une suite géométrique

On considère la suite  $(v_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :

$$v_n = 3 \times 4^n.$$

Comme  $v_n \neq 0$ , on peut calculer :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{3 \times 4^{n+1}}{3 \times 4^n} = 4.$$

La suite  $(v_n)$  est donc **géométrique de raison 4**.

### Exemple 19 : Un contre-exemple

On considère la suite  $(w_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :

$$w_n = 3n + 5.$$

On calcule :

$$\frac{w_1}{w_0} = \frac{8}{5} \quad \text{et} \quad \frac{w_2}{w_1} = \frac{11}{8}.$$

Les quotients ne sont pas constants. La suite  $(w_n)$  n'est donc **pas géométrique**.

## II.2 Forme explicite d'une suite géométrique

### Propriété 20

Soit  $(u_n)$  une suite géométrique de raison  $q$ .

Pour tous entiers naturels  $p$  et  $n$ , on a :

$$u_n = u_p \times q^{n-p}.$$

En particulier, lorsque le premier terme est  $u_0$ , on a :

$$u_n = u_0 \times q^n.$$

*Démonstration.* Si  $(u_n)$  est géométrique de raison  $q$ , alors :

$$u_1 = u_0 q, \quad u_2 = u_1 q = u_0 q^2, \quad u_3 = u_2 q = u_0 q^3.$$

En poursuivant ce raisonnement, on obtient :

$$u_n = u_0 q^n.$$

Plus généralement, pour passer de  $u_p$  à  $u_n$ , on multiplie par  $q$  exactement  $n - p$  fois, d'où :

$$u_n = u_p q^{n-p}.$$

□

### Exemple 21 : Retrouver la raison puis le terme général

On considère une suite géométrique  $(u_n)$  telle que  $u_3 = 8$  et  $u_6 = 1$ .  
Les deux termes sont séparés de 3 rangs, donc :

$$u_6 = u_3 q^3.$$

Ainsi :

$$q^3 = \frac{u_6}{u_3} = \frac{1}{8} \quad \text{donc} \quad q = \frac{1}{2}.$$

De plus :

$$u_0 = \frac{u_3}{q^3} = \frac{8}{\frac{1}{8}} = 64.$$

Finalement, pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_n = 64 \left( \frac{1}{2} \right)^n.$$

### Exemple 22 : Une situation d'intérêts composés

On place 1 500 euros en banque avec un taux d'intérêts composés de 3% par an.

Si  $c_n$  désigne le capital au bout de  $n$  années, alors les intérêts de l'année suivante valent  $0,03c_n$ , donc :

$$c_{n+1} = c_n + 0,03c_n = 1,03c_n.$$

La suite  $(c_n)$  est géométrique de premier terme  $c_0 = 1\,500$  et de raison **1,03**.

Ainsi :

$$c_n = 1\,500 \times 1,03^n.$$

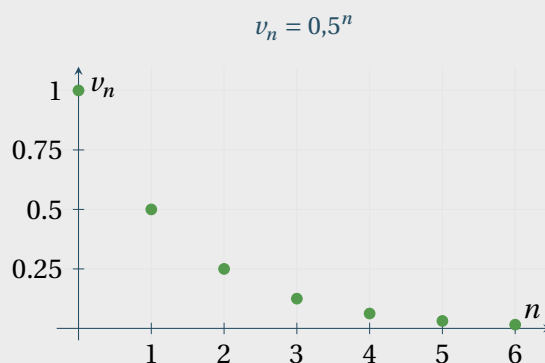
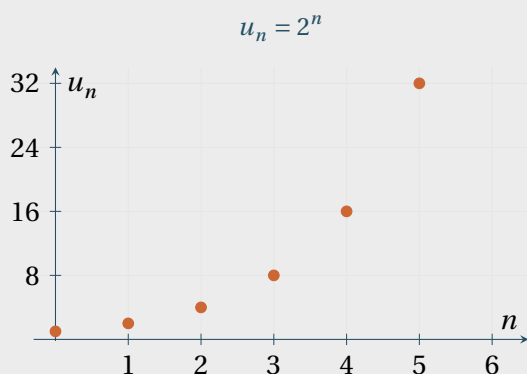
## II.3 Représentation graphique et variations

### Propriété 23

Les suites géométriques sont représentées par un nuage de points généralement non alignés, à évolution exponentielle.

**Exemple 24 : Deux représentations graphiques**

Les deux graphiques suivants illustrent les suites  $u_n = 2^n$  et  $v_n = 0,5^n$ .

**Propriété 25**

Soit  $q$  un réel.

- Si  $q > 1$ , alors la suite  $(q^n)$  est croissante.
- Si  $q = 0$ , alors la suite  $(q^n)$  est constante égale à 0, à partir du rang 1.
- Si  $0 < q < 1$ , alors la suite  $(q^n)$  est décroissante.
- Si  $q < 0$ , alors la suite  $(q^n)$  n'est pas monotone.

**Propriété 26**

Soit  $(u_n)$  une suite géométrique de raison  $q$ , avec  $u_n = u_0 q^n$ .

- Si  $q > 1$ , alors  $(u_n)$  est croissante si  $u_0 > 0$ , et décroissante si  $u_0 < 0$ .
- Si  $0 < q < 1$ , alors  $(u_n)$  est décroissante si  $u_0 > 0$ , et croissante si  $u_0 < 0$ .
- Si  $q = 1$ , alors  $(u_n)$  est constante.
- Si  $q < 0$ , alors  $(u_n)$  n'est pas monotone.

**Exemple 27 : Étudier les variations**

- La suite définie par  $u_n = 2 \times 3^n$  est géométrique, avec  $u_0 = 2 > 0$  et  $q = 3 > 1$ . Elle est donc **croissante**.
- La suite définie par  $v_n = -3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$  est géométrique, avec  $v_0 = -3 < 0$  et  $0 < q = \frac{1}{4} < 1$ . Elle est donc **croissante**.

**II.4 Somme de termes consécutifs****Propriété 28**

Soit  $q$  un réel différent de 1 et  $n$  un entier naturel. Alors :

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

*Démonstration.* On note :

$$S = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n.$$

Alors :

$$qS = q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n+1}.$$

En soustrayant, tous les termes intermédiaires se simplifient :

$$S - qS = 1 - q^{n+1}.$$

Donc :

$$(1 - q)S = 1 - q^{n+1}.$$

Comme  $q \neq 1$ , on peut diviser par  $1 - q$ , et on obtient :

$$S = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

□

### Propriété 29

Soit  $(u_n)$  une suite géométrique de premier terme  $u_0$  et de raison  $q \neq 1$ .

Alors :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

### Remarque II.2.

La formule précédente se retient souvent sous la forme :

$$\text{somme} = \text{premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}.$$

### Exemple 30 : Calculer une somme géométrique

On veut calculer :

$$S = 25 + 125 + 625 + 3\,125 + 15\,625.$$

On reconnaît la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme 25, de raison 5, avec 5 termes.

Ainsi :

$$S = 25 \times \frac{1 - 5^5}{1 - 5} = 19\,525.$$

### Exemple 31 : Somme de puissances de 2

On calcule :

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{10} = \frac{1 - 2^{11}}{1 - 2} = 2^{11} - 1 = 2\,047.$$