

GÉOMÉTRIE DANS UN REPÈRE

Compétences travaillées :

Reconnaître et utiliser un vecteur directeur ou un vecteur normal à une droite ; déterminer une équation cartésienne de droite ; reconnaître et déterminer une équation cartésienne de cercle ; utiliser le cercle de diamètre $[AB]$; reconnaître l'axe de symétrie et le sommet d'une parabole.

Dans tout le chapitre, on se place dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

I Équation cartésienne d'une droite

Définition 1

Toute droite du plan admet une équation cartésienne de la forme

$$ax + by + c = 0$$

où a , b et c sont des réels avec $(a; b) \neq (0; 0)$.

Propriété 2

Si une droite (d) a pour équation cartésienne

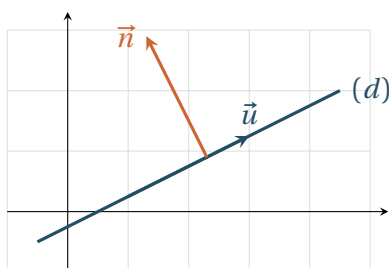
$$ax + by + c = 0,$$

alors :

$\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d) ,

et

$\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (d) .



Exemple 3

La droite (d) d'équation

$$3x - 2y + 5 = 0$$

admet pour vecteur directeur

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

et pour vecteur normal

$$\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Méthode 4 : Déterminer une équation de droite

Pour déterminer une équation cartésienne d'une droite, on peut utiliser :

- un point et un vecteur directeur ;
- un point et un vecteur normal ;
- deux points.

Exemple 5 : Avec un point et un vecteur directeur

On cherche une équation de la droite passant par A(3; 1) et de vecteur directeur

$$\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Soit M(x; y) un point de la droite. Alors :

$$\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, donc :

$$\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0.$$

Ainsi :

$$5(x-3) - (y-1)(-1) = 0$$

d'où :

$$5x + y - 16 = 0.$$

Exemple 6 : Avec un point et un vecteur normal

On cherche une équation de la droite passant par A(2; 3) et de vecteur normal

$$\vec{n} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Son équation est de la forme :

$$5x - y + c = 0.$$

Comme A(2; 3) appartient à la droite :

$$5 \times 2 - 3 + c = 0.$$

Donc $c = -7$, et une équation de la droite est :

$$5x - y - 7 = 0.$$

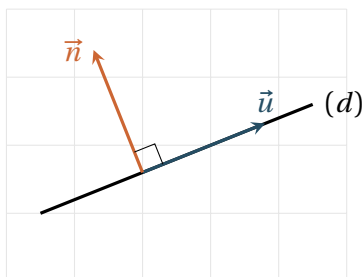
II Vecteur normal et orthogonalité**Définition 7**

Un vecteur non nul $\vec{n}$ est un vecteur normal à une droite lorsqu'il est orthogonal à un vecteur directeur de cette droite.

Propriété 8

Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur d'une droite et $\vec{n}$ un vecteur normal à cette droite, alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0.$$

**Exemple 9**

Les vecteurs

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{n} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sont orthogonaux car :

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 1 \times (-2) + 2 \times 1 = 0.$$

Donc $\vec{n}$ peut être un vecteur normal à une droite de vecteur directeur $\vec{u}$.

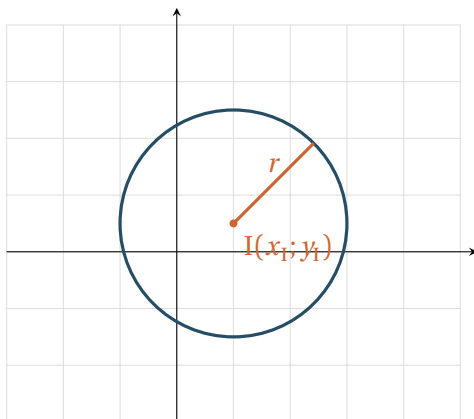
Propriété 10

- Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs normaux sont colinéaires.
- Deux droites sont orthogonales si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

III Équation cartésienne d'un cercle**Propriété 11**

Le cercle de centre $I(x_I; y_I)$ et de rayon $r > 0$ a pour équation cartésienne :

$$(x - x_I)^2 + (y - y_I)^2 = r^2.$$



Exemple 12

L'équation

$$(x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 9$$

est l'équation d'un cercle de centre

$$A(5; -3)$$

et de rayon 3.

Exemple 13Le cercle de centre $A(2; -1)$ passant par $B(-1; 1)$ a pour rayon AB .

On calcule :

$$AB^2 = (-1 - 2)^2 + (1 - (-1))^2 = 9 + 4 = 13.$$

Une équation de ce cercle est donc :

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 13.$$

IV Reconnaître une équation de cercle**Méthode 14**

Pour reconnaître une équation de cercle, on cherche à faire apparaître la forme :

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2.$$

On regroupe les termes en x , les termes en y , puis on utilise les identités remarquables.**Exemple 15**On considère l'ensemble E d'équation :

$$x^2 + y^2 - 2x - 10y + 17 = 0.$$

On transforme l'équation :

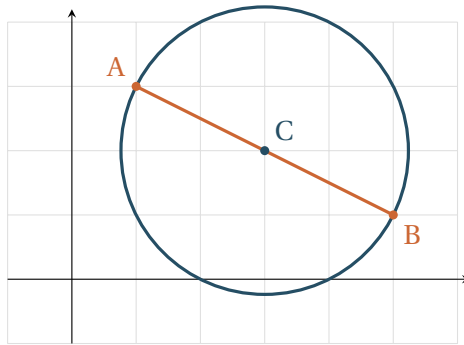
$$\begin{aligned} (x^2 - 2x) + (y^2 - 10y) + 17 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - 1)^2 - 1 + (y - 5)^2 - 25 + 17 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 5)^2 &= 9. \end{aligned}$$

Donc E est le cercle de centre $(1; 5)$ et de rayon 3.**V Cercle de diamètre $[AB]$** **Propriété 16**Le cercle de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0.$$

Si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, une équation de ce cercle est :

$$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0.$$

**Exemple 17**

Soient A(1;3) et B(5; 1).

Le cercle de diamètre [AB] vérifie :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0.$$

Donc :

$$(1-x)(5-x) + (3-y)(1-y) = 0.$$

En développant puis en regroupant :

$$x^2 - 6x + y^2 - 4y + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-2)^2 = 5.$$

Le cercle a donc pour centre (3;2) et pour rayon $\sqrt{5}$.

VI Rappel : parabole**Propriété 18**

La parabole d'équation

$$y = ax^2 + bx + c$$

admet :

$$x = -\frac{b}{2a}$$

pour axe de symétrie, et pour sommet :

$$S\left(-\frac{b}{2a}; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right).$$

