

CALCUL ALGÈBRIQUE ET LITTÉRAL

I Ensembles de nombres

I.1 Les différents ensembles

Définition 1 : Entiers naturels et entiers relatifs

- L'ensemble des **entiers naturels** est $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$.
- L'ensemble des **entiers relatifs** est $\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$.

Définition 2 : Nombres décimaux

Un nombre est **décimal** lorsqu'il peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$, avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.
L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$.

Exemple 3

On a $-6,13 = \frac{-613}{10^2}$, donc $-6,13 \in \mathbb{D}$. Un entier est aussi un nombre décimal : $8 = \frac{8}{10^0}$.

Définition 4 : Nombres rationnels

Un nombre est **rationnel** lorsqu'il peut s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$, avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.
L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

Exemple 5

Le nombre $\frac{1}{3}$ est rationnel, mais il n'est pas décimal : son écriture décimale $0,333\dots$ est illimitée.

Démonstration. Supposons que $\frac{1}{3}$ soit décimal. Il existe alors $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que

$$\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}.$$

On aurait donc $10^n = 3a$, ce qui signifie que 3 divise 10^n . Or les seuls facteurs premiers de 10^n sont 2 et 5. C'est impossible : $\frac{1}{3}$ n'est donc pas décimal. □

Définition 6 : Nombres réels et irrationnels

L'ensemble des abscisses de tous les points d'une droite graduée est l'ensemble des **nombres réels**, noté $\mathbb{R}$. Les réels qui ne sont pas rationnels sont appelés **irrationnels**.

Exemple 7

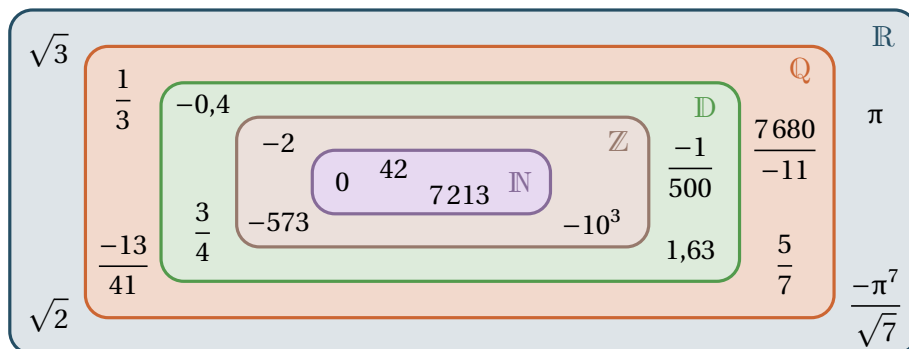
Les réels $\sqrt{2}$ et π sont irrationnels.

Démonstration. Supposons que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, où $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ et la fraction $\frac{p}{q}$ est irréductible.

Alors $p^2 = 2q^2$, donc p est pair. En écrivant $p = 2k$, on obtient $q^2 = 2k^2$, donc q est également pair. Cela contredit l'irréductibilité de $\frac{p}{q}$. Ainsi, $\sqrt{2}$ est irrationnel. □

Propriété 8 : Inclusions des ensembles de nombres

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$



Remarque I.1. Le symbole $\in$ (« appartient ») relie un **élément** à un ensemble ($-3 \in \mathbb{Z}$), tandis que $\subset$ (« inclus ») relie deux **ensembles** ($\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$).

Exercice 9 : Classer sans calculatrice

Pour chacun des nombres suivants, indiquer le plus petit ensemble parmi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ auquel il appartient :

$$-12; \quad \frac{24}{3}; \quad \frac{4}{5} - \frac{2}{15}; \quad \frac{1}{7}; \quad \sqrt{25}; \quad \sqrt{15}; \quad \pi.$$

$$-12 \in \mathbb{Z}; \quad \frac{24}{3} = 8 \in \mathbb{N}; \quad \frac{4}{5} - \frac{2}{15} = \frac{2}{3} \in \mathbb{Q}; \quad \frac{1}{7} \in \mathbb{Q}; \quad \sqrt{25} = 5 \in \mathbb{N}; \quad \sqrt{15} \in \mathbb{R}; \quad \pi \in \mathbb{R}.$$

Les deux derniers nombres sont irrationnels.

I.2 Valeur exacte et valeur approchée
Définition 10

Une **valeur exacte** désigne le nombre sans erreur. Une **valeur approchée** d'un nombre est un nombre proche de celui-ci. La précision indique l'écart maximal admis entre les deux nombres.

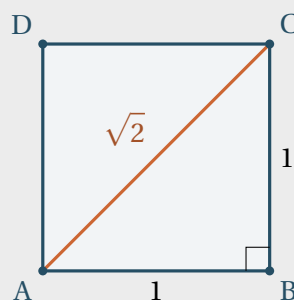
Exemple 11

La diagonale d'un carré de côté 1 a pour valeur exacte $\sqrt{2}$.

La calculatrice affiche un nombre décimal approché :

$$\sqrt{2} \approx 1,414213562.$$

Une autre valeur approchée de $\sqrt{2}$ à une précision de 10^{-2} est 1,41.



Remarque I.2. Un affichage de calculatrice ne permet pas, à lui seul, de décider si un nombre est rationnel. On conservera donc les écritures comme $\sqrt{2}$, π ou $\frac{1}{7}$ lorsqu'une valeur exacte est demandée.

II Calcul numérique
II.1 Comparer deux nombres
Méthode 12 : Comparaison additive

Pour comparer deux nombres A et B , on peut étudier le signe de leur différence :

$$A - B > 0 \Leftrightarrow A > B; \quad A - B = 0 \Leftrightarrow A = B; \quad A - B < 0 \Leftrightarrow A < B.$$

Méthode 13 : Comparaison multiplicative

Lorsque A et B sont **strictement positifs**, on peut étudier leur quotient :

$$\frac{A}{B} > 1 \Leftrightarrow A > B; \quad \frac{A}{B} = 1 \Leftrightarrow A = B; \quad \frac{A}{B} < 1 \Leftrightarrow A < B.$$

Remarque II.1. Une comparaison par quotient n'est pas utilisée si l'un des deux nombres est nul ou négatif. La comparaison par différence reste alors disponible.

Exemple 14 : Comparer deux fractions

Comparons $\frac{17}{8}$ et $\frac{16}{7}$. Par différence $\frac{17}{8} - \frac{16}{7} = \frac{119 - 128}{56} = -\frac{9}{56} < 0$. Ainsi, $\frac{17}{8} < \frac{16}{7}$.

II.2 Calculer avec des fractions**Propriété 15 : Règles de calcul**

Pour $a, c \in \mathbb{R}$ et $b, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}; \quad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}; \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} \quad \text{si } c \neq 0.$$

Remarque II.2. Pour additionner (ou soustraire) des fractions de dénominateurs différents, on commence par les mettre au même dénominateur.

Exemple 16

$$\frac{x}{5} - \frac{2x}{3} = \frac{3x}{15} - \frac{10x}{15} = -\frac{7x}{15}; \quad \frac{x+2}{5} \div \frac{3}{5} = \frac{x+2}{5} \times \frac{5}{3} = \frac{x+2}{3}.$$

Exercice 17 : Calculer et simplifier

Calculer sans calculatrice :

$$A = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \times 5; \quad B = \frac{7}{14} \times \frac{5}{3}; \quad C = \frac{\frac{x}{4}}{\frac{2}{3}}.$$

$$A = \frac{4}{6} + \frac{5}{6} = \frac{3}{2}; \quad B = \frac{1}{2} \times \frac{5}{3} = \frac{5}{6}; \quad C = \frac{x}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{3x}{8}.$$

II.3 Calculer avec des puissances**Définition 18**

Pour $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}}.$$

Si $a \neq 0$, alors $a^0 = 1$ et, pour $n \geq 1$,

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Remarque II.3. Par convention, $0^0 = 1$.

Propriété 19 : Puissances entières relatives

Pour $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $m, n \in \mathbb{Z}$:

$$a^m \times a^n = a^{m+n}; \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}; \quad (a^m)^n = a^{mn}; \quad (ab)^n = a^n b^n; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Exemple 20

$$3^2 \times 3^4 = 3^6, \quad \frac{2^2}{2^3} = 2^{-1} = \frac{1}{2}, \quad (5^{-2})^3 = 5^{-6}.$$

Exercice 21 : Utiliser les règles sur les puissances

Simplifier :

$$A = \frac{3^2 \times 3^4}{3^7}, \quad B = (10^3)^{-2}, \quad C = \frac{4^3}{8^2}.$$

$$A = \frac{3^6}{3^7} = 3^{-1} = \frac{1}{3}, \quad B = 10^{-6}, \quad C = \frac{(2^2)^3}{(2^3)^2} = \frac{2^6}{2^6} = 1.$$

II.4 Calculer avec des racines carrées**Définition 22**

Soit a un réel positif. La **racine carrée** de a , notée $\sqrt{a}$, est l'unique réel positif dont le carré vaut a :

$$(\sqrt{a})^2 = a.$$

Remarque II.4. La racine carrée d'un nombre strictement négatif n'est pas définie.

Propriété 23Pour tout réel a ,

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

La valeur absolue $|a|$ est la distance entre a et 0. En particulier, si $a \geq 0$, alors $\sqrt{a^2} = a$, tandis que si $a < 0$, alors $\sqrt{a^2} = -a$.

Exemple 24

$$\sqrt{(-8)^2} = |-8| = 8 \quad \text{et non } -8.$$

Propriété 25 : Produit et quotientPour $a, b \geq 0$,

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}.$$

Si, de plus, $b > 0$, alors

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Démonstration. Soient $a, b \geq 0$. Le nombre $\sqrt{a}\sqrt{b}$ est positif ou nul et

$$(\sqrt{a}\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 (\sqrt{b})^2 = ab.$$

C'est donc l'unique réel positif ou nul dont le carré vaut ab . Ainsi,

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}.$$

□

Méthode 26 : Simplifier une racine carrée

On cherche sous le radical un facteur qui est un **carré parfait**. Par exemple :

$$\sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{4}\sqrt{5} = 2\sqrt{5}; \quad \sqrt{18} = \sqrt{3^2 \times 2} = 3\sqrt{2}.$$

Remarque II.5. Il n'existe pas de règle analogue pour une somme ! En général :

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Par exemple, $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$, alors que $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3+4 = 7$.

Exercice 27 : Calcul exact de longueurs

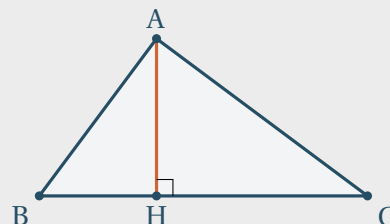
Dans le triangle ABC, la hauteur issue de A coupe [BC] en H.

On donne

$$BH = 5\sqrt{3}, \quad HC = 9\sqrt{3}$$

et $AH = 3\sqrt{15}$.

1. Calculer les longueurs exactes BC, AB et AC.
2. Calculer l'aire exacte du triangle ABC.



1. $BC = 14\sqrt{3}$. Dans les triangles rectangles ABH et AHC,

$$AB^2 = (5\sqrt{3})^2 + (3\sqrt{15})^2 = 210, \quad AC^2 = (9\sqrt{3})^2 + (3\sqrt{15})^2 = 378.$$

Donc $AB = \sqrt{210}$ et $AC = 3\sqrt{42}$.

- 2.

$$\mathcal{A} = \frac{BC \times AH}{2} = \frac{14\sqrt{3} \times 3\sqrt{15}}{2} = 63\sqrt{5}.$$

III Calcul littéral et équations**III.1 Développer, réduire ou factoriser****Définition 28**

- **Développer** un produit consiste à l'écrire sous la forme d'une **somme algébrique**.
- **Réduire** une expression consiste à **regrouper** ses termes de même nature.
- **Factoriser** une somme algébrique consiste à l'écrire sous la forme d'un **produit**.

Propriété 29 : Distributivité

Pour tous réels a, b, c, d et k :

$$k(a+b) = ka + kb$$

et

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd.$$

Exemple 30

$$-2(y+7) = -2y - 14; \quad (3x-2)(-5x+4) = -15x^2 + 12x + 10x - 8 = -15x^2 + 22x - 8.$$

Méthode 31 : Factoriser par un facteur commun

On repère une multiplication commune à tous les termes :

$$\underbrace{k}_{\text{facteur commun}} \quad a + \underbrace{k}_{\text{facteur commun}} \quad b = k(a + b).$$

Exemple 32

$$5(3x - 7) + 8x(3x - 7) = (3x - 7)(5 + 8x).$$

Propriété 33 : Identités remarquables

Pour tous réels a et b :

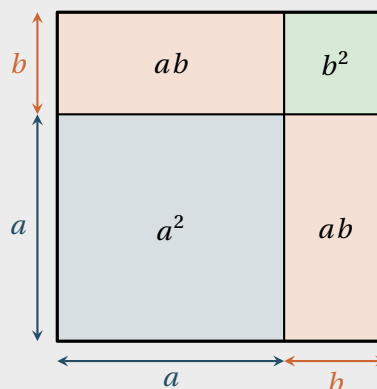
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2; \quad (a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$$

Exemple 34 : Voir une identité remarquable

Pour $a, b > 0$, l'aire du grand carré peut se calculer de deux façons.

Ainsi,

$$(a + b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

**Exercice 35 : Choisir une transformation**

1. Développer et réduire $A = (x - 6)^2$.

2. Factoriser $B = 36x^2 - 60x + 25$.

3. Factoriser $C = (4x - 1)^2 - 9$.

1. $A = x^2 - 12x + 36$.

2. $B = (6x - 5)^2$.

3. $C = (4x - 1)^2 - 3^2 = (4x - 4)(4x + 2) = 8(x - 1)(2x + 1)$.

Remarque III.1. Il faut choisir la forme la plus adaptée pour répondre à chaque question.

- Pour additionner ou effectuer une application numérique, la **forme développée réduite** est souvent la plus adaptée.
- Pour trouver les zéros d'une fonction, il vaut mieux travailler avec la **forme factorisée** et résoudre une équation produit nul.

III.2 Résoudre une équation**Définition 36**

Une **équation** est une égalité contenant une inconnue. Une **solution** est une valeur de l'inconnue qui rend l'égalité vraie. Résoudre l'équation consiste à déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ de toutes ses solutions.

Propriété 37 : Équations équivalentes

On obtient une équation équivalente, c'est-à-dire ayant les mêmes solutions, lorsque l'on :

- ajoute ou soustrait un même nombre aux deux membres ;
- multiplie ou divise les deux membres par un même nombre non nul.

Remarque III.2. Le symbole $\Leftrightarrow$ se lit « si et seulement si » (ou « équivaut à »).

Exemple 38 : Équation du premier degré

$$\begin{aligned} 5x + 8 &= -4x - 10 \\ \Leftrightarrow 9x + 8 &= -10 \\ \Leftrightarrow 9x &= -18 \\ \Leftrightarrow x &= -2. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{-2\}$.

Propriété 39 : Produit nul

Pour tous réels A et B :

$$AB = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0.$$

Exemple 40

$$\begin{aligned} (2x - 3)(x + 4) = 0 &\Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \quad \text{ou} \quad x + 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \quad \text{ou} \quad x = -4. \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{S} = \left\{-4; \frac{3}{2}\right\}$.

Propriété 41 : Équation $x^2 = a$

Soit $a \in \mathbb{R}$.

- Si $a < 0$, l'équation $x^2 = a$ n'a pas de solution : $\mathcal{S} = \emptyset$.
- Si $a = 0$, l'équation possède une unique solution : $\mathcal{S} = \{0\}$.
- Si $a > 0$, l'équation possède deux solutions opposées :

$$\mathcal{S} = \{-\sqrt{a}; \sqrt{a}\}.$$

Démonstration. Un carré est toujours positif ou nul, ce qui règle le cas $a < 0$. Si $a \geq 0$,

$$x^2 = a \Leftrightarrow x^2 - a = 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) = 0.$$

La propriété du produit nul donne $x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$. Lorsque $a = 0$, ces deux écritures désignent la même solution. $\square$

Exercice 42 : Résoudre dans $\mathbb{R}$

a. $5x - 7 = 3$; b. $x(3x + 6) = 0$; c. $x^2 = 13$; d. $x^2 = -4$.

a. $\mathcal{S} = \{2\}$; b. $\mathcal{S} = \{-2; 0\}$; c. $\mathcal{S} = \{-\sqrt{13}; \sqrt{13}\}$; d. $\mathcal{S} = \emptyset$.

III.3 Isoler une variable

Méthode 43

Isoler une variable consiste à transformer une relation par équivalences jusqu'à laisser cette variable seule dans un membre. Toute division impose de vérifier que le diviseur n'est pas nul.

Exemple 44 : Longueur d'un rectangle

Le périmètre d'un rectangle de longueur L et de largeur ℓ est

$$P = 2(L + \ell).$$

Isolons L :

$$P = 2(L + \ell) \Leftrightarrow \frac{P}{2} = L + \ell \Leftrightarrow L = \frac{P}{2} - \ell.$$

Exercice 45 : Une formule géométrique

L'aire d'un triangle est donnée par $\mathcal{A} = \frac{bh}{2}$, où b est la longueur d'une base et h la hauteur correspondante. Exprimer h en fonction de $\mathcal{A}$ et b .

Si $b \neq 0$,

$$\mathcal{A} = \frac{bh}{2} \Leftrightarrow 2\mathcal{A} = bh \Leftrightarrow h = \frac{2\mathcal{A}}{b}.$$

IV L'essentiel

Je veux...	Je pense à...
Classer un nombre	Chercher le plus petit ensemble auquel il appartient : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
Comparer A et B	Étudier le signe de $A - B$. Si $A, B > 0$, on peut aussi comparer $\frac{A}{B}$ à 1.
Transformer une expression	Développer et réduire pour calculer; factoriser pour faire apparaître un produit.
Résoudre une équation	Effectuer des transformations équivalentes. Si un produit est nul, annuler chaque facteur.
Isoler une variable	Effectuer la même opération dans les deux membres, sans diviser par zéro.