

# GÉOMÉTRIE PLANE ET INTRODUCTION AUX VECTEURS

## I Configurations du plan

### Méthode 1

1. relever uniquement les informations données ou codées;
2. identifier la configuration : triangle rectangle, configuration de Thalès, parallélogramme ...;
3. choisir une propriété dont les hypothèses sont toutes vérifiées;
4. rédiger en distinguant hypothèses, propriété et conclusion.

**Remarque I.1.** Une figure suggère une conjecture, mais ses proportions ne constituent jamais une preuve.

### I.1 Triangles

#### Théorème 2 : Pythagore et sa réciproque

Dans un triangle ABC :

$$ABC \text{ est rectangle en } A \iff BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

**Remarque I.2.** Dans l'égalité, BC est la longueur de l'**hypoténuse**.

#### Théorème 3 : Thalès et sa réciproque

Soient A,B,E alignés dans le même ordre et A,C,F alignés dans le même ordre.

$$(BC) \parallel (EF) \iff \frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF} = \frac{BC}{EF}.$$

#### Propriété 4 : Trigonométrie dans le triangle rectangle

Dans le triangle ABC rectangle en A :

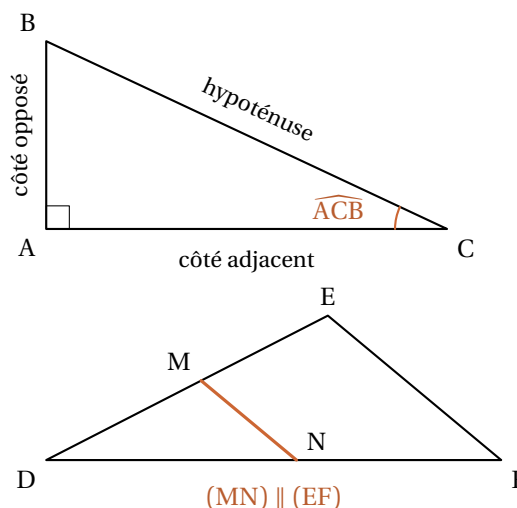
$$\cos(\widehat{ACB}) = \frac{AC}{BC}; \quad \sin(\widehat{ACB}) = \frac{AB}{BC}; \quad \tan(\widehat{ACB}) = \frac{AB}{AC}.$$

Quelles données  
sont codées ?

Triangle rectangle +  
deux longueurs :  
**Pythagore**  
Trois longueurs :  
**réciproque**

Des points alignés et  
des droites parallèles  
**Thalès**

Un triangle rectangle,  
un angle et des côtés  
**Trigonométrie**



#### Exemple 5 : Choisir et appliquer une propriété

Le triangle ABC est rectangle en A, avec AB = 6 cm et AC = 4,5 cm. Alors

$$BC^2 = 6^2 + 4,5^2 = 56,25, \quad \text{donc} \quad BC = 7,5 \text{ cm.}$$

De plus,

$$\tan(\widehat{ABC}) = \frac{AC}{AB} = \frac{4,5}{6} = 0,75, \quad \widehat{ABC} \approx 36,9^\circ.$$

## I.2 Parallélogrammes et quadrilatères particuliers

### Propriété 6 : Reconnaître un parallélogramme

Pour un quadrilatère non croisé ABCD, chacune des conditions suivantes permet de conclure qu'il s'agit d'un parallélogramme :

- ses côtés opposés sont parallèles ;
- ses diagonales ont le même milieu ;
- deux côtés opposés sont parallèles et de même longueur.

Le tableau suivant résume des propriétés usuelles, qui ne constituent pas nécessairement, prises isolément, des critères de reconnaissance.

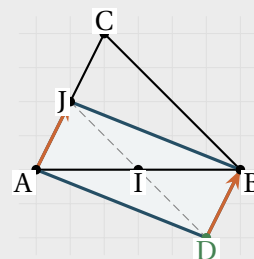
| Quadrilatère | Côtés                                        | Diagonales et angles                                                   |
|--------------|----------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|
| Rectangle    | côtés opposés parallèles et de même longueur | diagonales de même longueur ; quatre angles droits                     |
| Losange      | quatre côtés de même longueur                | diagonales perpendiculaires                                            |
| Carré        | quatre côtés de même longueur                | diagonales perpendiculaires et de même longueur ; quatre angles droits |

### Exercice 7 : Une démonstration de configuration

Dans un triangle ABC, I est le milieu de [AB] et J celui de [AC]. Le point D est défini de sorte que I soit le milieu de [JD].

1. Démontrer que AJBD est un parallélogramme.
2. En déduire que  $(BD) \parallel (AC)$ .

Les diagonales [AB] et [JD] de AJBD ont le même milieu I, donc AJBD est un parallélogramme. Ainsi  $(BD) \parallel (AJ)$ . Or A, J, C sont alignés, donc  $(BD) \parallel (AC)$ .



## II Définition et égalité de vecteurs

### II.1 De la translation au vecteur

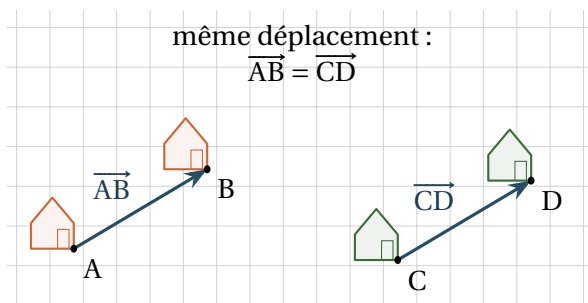
#### Définition 8 : Vecteur

À la translation qui transforme un point A en un point B, on associe le **vecteur**  $\overrightarrow{AB}$ .

Il est représenté par une flèche d'origine A et d'extrémité B.

Si  $A \neq B$ , le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  est caractérisé par :

- sa **direction**, celle de la droite (AB) ;
- son **sens**, de A vers B ;
- sa **norme**, la longueur AB, notée  $\|\overrightarrow{AB}\|$ .



**Définition 9 : Vecteur nul et vecteur opposé**

La translation qui ne déplace aucun point est associée au **vecteur nul**  $\vec{0}$ . Pour tout point A,

$$\overrightarrow{AA} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \|\vec{0}\| = 0.$$

L'opposé de  $\overrightarrow{AB}$  est le vecteur  $\overrightarrow{BA}$  :

$$-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}.$$

**II.2 Vecteurs égaux et représentants****Définition 10**

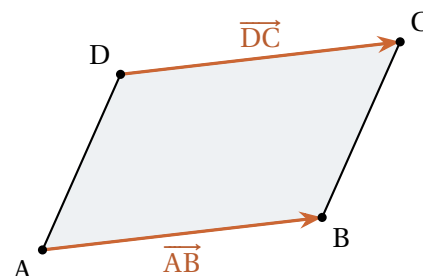
Deux vecteurs non nuls sont **égaux** lorsqu'ils ont même direction, même sens et même norme. Chacune des « flèches » qui représente le même vecteur est appelée un **représentant** de ce vecteur. Un vecteur peut être nommé par une lettre :  $\vec{u}$ .

**Remarque II.1.** Le vecteur nul, qui n'a ni direction ni sens, est l'unique vecteur de norme nulle.

**Théorème 11 : Égalité de vecteurs et parallélogramme**

Pour quatre points A, B, C, D :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \iff \text{ABCD est un parallélogramme, éventuellement aplati.}$$

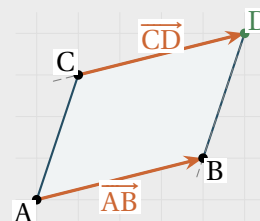


**Remarque II.2.** L'ordre des lettres est essentiel : le vecteur partant de D est  $\overrightarrow{DC}$ .

**Exercice 12 : Construire un représentant**

À partir des trois points non alignés A, B, C donnés ci-dessous, construire le point D tel que  $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ , puis justifier la construction.

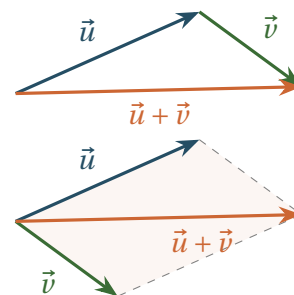
On construit le parallélogramme ABDC : la parallèle à (AB) passant par C coupe la parallèle à (AC) passant par B en D. Alors  $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ .

**III Opérations vectorielles****III.1 Somme et relation de Chasles****Définition 13 : Somme de deux vecteurs**

La somme  $\vec{u} + \vec{v}$  est le vecteur associé à l'enchaînement de la translation de vecteur  $\vec{u}$ , puis de celle de vecteur  $\vec{v}$ .

**Méthode 14 : Deux constructions de la somme**

- **Bout à bout** : on place un représentant de  $\vec{v}$  à l'extrémité d'un représentant de  $\vec{u}$ .
- **Même origine** : on complète le parallélogramme construit sur  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ ; sa diagonale représente  $\vec{u} + \vec{v}$ .

**Théorème 15 : Relation de Chasles**

Pour tous points A,B,C :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

**Remarque III.1.** Le point d'arrivée du premier vecteur doit être le point de départ du second.

**Exemple 16 : Simplifier un calcul vectoriel**

$$\overrightarrow{ML} - \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{ML} + \overrightarrow{KM} = \overrightarrow{KM} + \overrightarrow{ML} = \overrightarrow{KL}.$$

**Propriété 17 : Règles de calcul**

Pour tous vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  :

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}; \quad (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}); \quad \vec{u} + \vec{0} = \vec{u}; \quad \vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}.$$

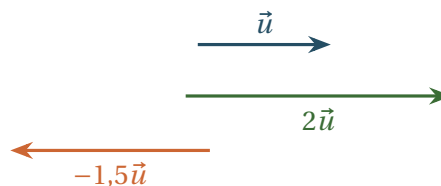
**III.2 Produit d'un vecteur par un réel****Définition 18**

Soient  $\vec{u}$  un vecteur et  $k$  un réel.

Si  $\vec{u} \neq \vec{0}$  et  $k \neq 0$ , le vecteur  $k\vec{u}$  :

- a la même direction que  $\vec{u}$ ;
- a le même sens si  $k > 0$ , et le sens contraire si  $k < 0$ ;
- a pour norme  $\|k\vec{u}\| = |k| \|\vec{u}\|$ .

De plus,  $0\vec{u} = \vec{0}$  et  $k\vec{0} = \vec{0}$ .



**Remarque III.2.** La norme  $\|\vec{u}\|$  est un nombre réel, pas un vecteur.

**Propriété 19**

Pour tous réels  $k, k'$  et tous vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}$  :

$$k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}, \quad k\vec{u} + k'\vec{u} = (k + k')\vec{u}, \quad k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}.$$

**Exercice 20 : Construire et calculer**

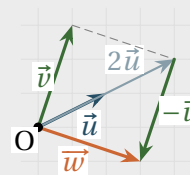
À partir des représentants donnés, construire  $\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v}$ . Simplifier ensuite :

$$3(\vec{u} + \vec{v}) - 2\vec{u} - 4\vec{v}.$$

On construit d'abord  $2\vec{u}$ , puis on ajoute  $-\vec{v}$  bout à bout. Le vecteur obtenu est  $\vec{w}$ .

Par distributivité,

$$\begin{aligned} 3(\vec{u} + \vec{v}) - 2\vec{u} - 4\vec{v} &= (3 - 2)\vec{u} + (3 - 4)\vec{v} \\ &= \vec{u} - \vec{v}. \end{aligned}$$

**IV Colinéarité et combinaison de vecteurs****IV.1 Vecteurs colinéaires****Définition 21**

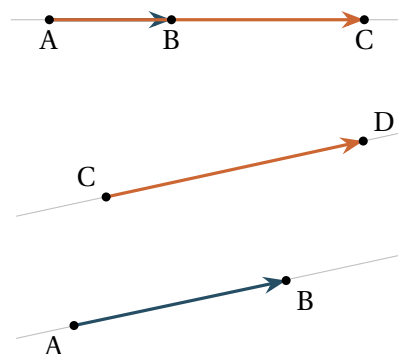
Deux vecteurs non nuls  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont **colinéaires** lorsqu'ils ont la même direction. Cela équivaut à l'existence d'un réel non nul  $k$  tel que

$$\vec{u} = k\vec{v}.$$

**Remarque IV.1.** Par convention, le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

**Propriété 22 : Alignement et parallélisme**

- A, B et C sont alignés si et seulement si  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  sont colinéaires.
- Si  $A \neq B$  et  $C \neq D$ , les droites  $(AB)$  et  $(CD)$  sont parallèles si et seulement si  $\vec{AB}$  et  $\vec{CD}$  sont colinéaires.

**Méthode 23 : Démontrer par colinéarité**

Pour prouver un alignement ou un parallélisme sans coordonnées :

1. choisir deux vecteurs portés par les droites étudiées;
2. transformer ces vecteurs avec Chasles et les données de la figure;
3. obtenir une égalité de la forme  $\vec{u} = k\vec{v}$ ;
4. conclure à la colinéarité, puis à l'alignement ou au parallélisme.

**Exercice 24 : Démontrer un alignement par colinéarité**

Soit ABCD un parallélogramme. Les points E et F sont définis par

$$\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AD}.$$

Démontrer que les points E, C et F sont alignés.

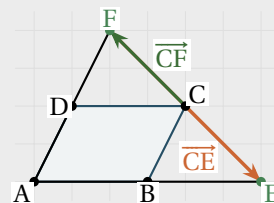
Posons  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ . Alors

$$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE} = -(\vec{u} + \vec{v}) + 2\vec{u} = \vec{u} - \vec{v},$$

tandis que

$$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF} = -(\vec{u} + \vec{v}) + 2\vec{v} = -\vec{u} + \vec{v}.$$

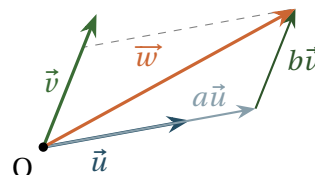
Ainsi  $\overrightarrow{CE} = -\overrightarrow{CF}$  : ces vecteurs sont colinéaires, donc E, C et F sont alignés.

**IV.2 Combinaison de deux vecteurs non colinéaires****Propriété 25**

Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas colinéaires, alors tout vecteur  $\vec{w}$  du plan s'écrit d'une unique manière sous la forme

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$$

où  $a$  et  $b$  sont des réels. On dit que  $\vec{w}$  est une **combinaison linéaire** de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

**Exemple 26**

Dans un parallélogramme ABCD, en posant  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ , la relation du parallélogramme donne

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \vec{u} + \vec{v}.$$

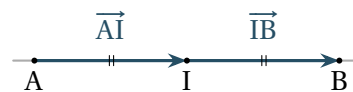
Si M vérifie  $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ , alors  $\overrightarrow{AM} = 2\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}$ .

## V Milieu d'un segment

### Théorème 27 : Caractérisations vectorielles du milieu

Pour trois points A, B, I, les affirmations suivantes sont équivalentes :

$$I \text{ est le milieu de } [AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}.$$



*Démonstration.* Si I est le milieu de [AB], les vecteurs  $\overrightarrow{AI}$  et  $\overrightarrow{IB}$  ont même direction, même sens et même norme : ils sont égaux. Réciproquement,  $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$  impose que A, I et B soient alignés dans cet ordre et que  $AI = IB$ , donc I est le milieu de [AB].

Enfin,  $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$  équivaut à  $-\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB}$ , donc à  $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ . □

### Exercice 28 : Prouver qu'un point est un milieu

Soit ABCD un parallélogramme. Les points E et F sont définis par

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}.$$

Démontrer que le milieu I de [AC] est aussi le milieu de [EF].

Comme I est le milieu de [AC],

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}).$$

$$\text{Or } \overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}.$$

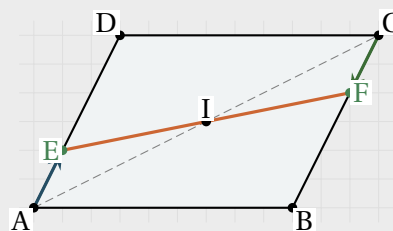
Ainsi

$$\overrightarrow{EI} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AI} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AD}.$$

De plus,  $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ , puis

$$\overrightarrow{IF} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) - \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AD}.$$

Ainsi  $\overrightarrow{EI} = \overrightarrow{IF}$ , donc I est le milieu de [EF].



## VI Synthèse

| Objectif                          | Outil vectoriel privilégié                                                                           |
|-----------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Construire une somme              | représentants bout à bout ou règle du parallélogramme                                                |
| Simplifier un chemin              | relation de Chasles                                                                                  |
| Prouver un alignement             | colinéarité de deux vecteurs de même origine                                                         |
| Prouver un parallélisme           | colinéarité de deux vecteurs directeurs                                                              |
| Prouver qu'un point est un milieu | $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ ou $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ |