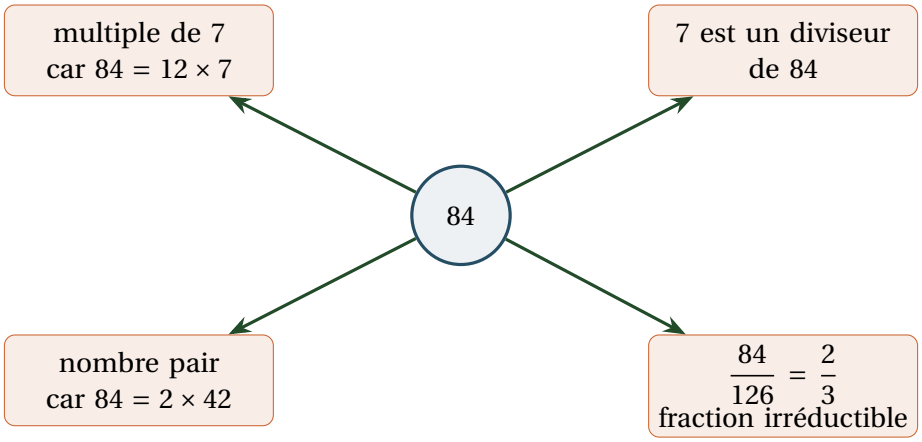
ARITHMÉTIQUE



Méthode 1 : Revenir aux définitions

En arithmétique, une preuve commence souvent par une écriture : « a est un multiple de b » devient $a = kb$ avec k entier ; « n est impair » devient $n = 2k + 1$. Cette traduction algébrique permet ensuite d'enchaîner les égalités et de conclure.

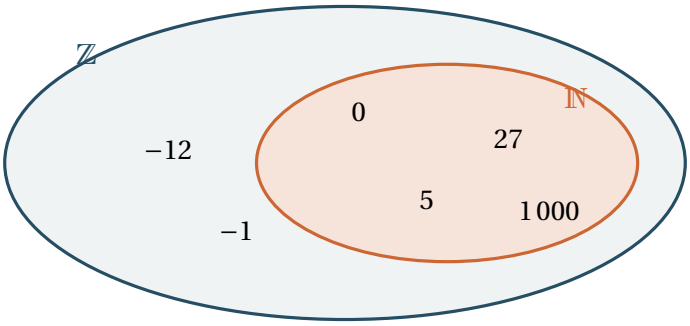
I Entiers naturels et entiers relatifs

Définition 2

- $\mathbb{N} = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \ldots\}$ est l'ensemble des **entiers naturels**.
- $\mathbb{Z} = \{\ldots ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \ldots\}$ est l'ensemble des **entiers relatifs**.

Tout entier naturel est un entier relatif :

$$\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}.}$$



Exemple 3 : Appartenance et inclusion

$$-7 \in \mathbb{Z}, \qquad -7 \notin \mathbb{N}, \qquad 12 \in \mathbb{N}, \qquad \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}.$$

Un nombre **appartient** à un ensemble ; un ensemble est **inclus** dans un autre.

Exercice 4 : Lire les symboles

Compléter par $\in$, $\notin$, $\subset$ ou $\not\subset$.

$$-4 \ldots \mathbb{N}, \qquad 0 \ldots \mathbb{N}, \qquad \mathbb{N} \ldots \mathbb{Z}, \qquad \mathbb{Z} \ldots \mathbb{N}.$$

$-4 \notin \mathbb{N}$, $0 \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$.

II Multiples et diviseurs

II.1 Une même relation, trois formulations

Définition 5

Soient a et b deux entiers, avec $b \neq 0$. On dit que a est un **multiple** de b lorsqu'il existe un entier k tel que

$$\boxed{a = kb.}$$

On dit alors aussi que b est un **diviseur** de a, ou que b **divise** a.

a est un multiple de b $\leftrightarrow$ $a = kb$ avec $k \in \mathbb{Z}$ $\leftrightarrow$ b divise a noté parfois $b \mid a$

Exemple 6

$$84 = 12 \times 7.$$

Comme $12 \in \mathbb{Z}$, 84 est un multiple de 7, 7 est un diviseur de 84, et $7 \mid 84$.
En revanche, $\frac{17}{2} = 8{,}5 \notin \mathbb{Z}$. Ainsi 2 ne divise pas 17, bien que le quotient réel $\frac{17}{2}$ existe.

Remarque II.1. Dire que b divise a ne signifie pas seulement que le quotient $\frac{a}{b}$ existe : ce quotient doit être un **entier**.

Propriété 7

Pour tout entier a :

- 1 et -1 divisent a ;
- si $a \neq 0$, alors a et $-a$ divisent a ;
- a est un multiple de chacun de ses diviseurs.

II.2 Critères de divisibilité : rappels

Diviseur	Critère portant sur l'écriture décimale de l'entier
2	Le chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8.
3	La somme des chiffres est un multiple de 3.
4	Le nombre formé par les deux derniers chiffres est un multiple de 4.
5	Le chiffre des unités est 0 ou 5.
9	La somme des chiffres est un multiple de 9.
10	Le chiffre des unités est 0.

Exemple 8 : Utiliser plusieurs critères

Pour 63 420 :

- le chiffre des unités est 0 : il est divisible par 2, 5 et 10 ;
- $6+3+4+2+0 = 15$: il est divisible par 3, mais pas par 9 ;
- 20 est divisible par 4 : il est divisible par 4.

II.3 Démontrer à partir de la définition

Théorème 9 : Somme de deux multiples

La somme de deux multiples d'un même entier est encore un multiple de cet entier.

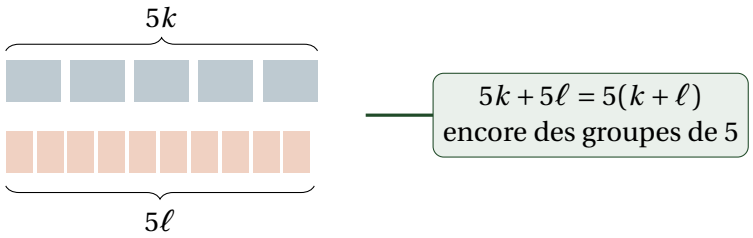
Démonstration. Soit $a \in \mathbb{Z}$. Si u et v sont deux multiples de a, il existe $k \in \mathbb{Z}$ et $\ell \in \mathbb{Z}$ tels que

$$u = ak \qquad \text{et} \qquad v = a\ell.$$

Alors

$$u + v = ak + a\ell = a(k + \ell).$$

Or $k + \ell \in \mathbb{Z}$. Ainsi $u + v$ est un multiple de a. Le schéma suivant illustre le cas $a = 5$. □



Méthode 10 : Rédiger une preuve de divisibilité

1. Traduire chaque hypothèse par une égalité comportant un entier.
2. Transformer l'expression, souvent en factorisant.
3. Vérifier que le nouveau facteur est entier.
4. Revenir mot pour mot à la définition et conclure.

Exercice 11 : Prouver ou réfuter

1. Montrer que la somme de trois entiers consécutifs est un multiple de 3.
2. La somme de quatre entiers consécutifs est-elle toujours un multiple de 4 ?

1. Écrivons les trois entiers n, $n+1$ et $n+2$, avec $n \in \mathbb{Z}$. Leur somme vaut

$$n + (n+1) + (n+2) = 3n + 3 = 3(n+1).$$

Comme $n + 1 \in \mathbb{Z}$, cette somme est un multiple de 3.

2. Non : $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ n'est pas un multiple de 4. Un contre-exemple suffit à réfuter une affirmation universelle.

III Parité

Définition 12

Soit $n \in \mathbb{Z}$.

- n est **pair** s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\boxed{n = 2k}$.
- n est **impair** s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\boxed{n = 2k + 1}$.

Tout entier est soit pair, soit impair.



$8 = 2 \times 4$: pair $\qquad$ $9 = 2 \times 4 + 1$: impair

Propriété 13 : Calculer avec la parité

Opération	Résultat	Exemple
pair + pair	pair	$12+8=20$
impair + impair	pair	$7+5=12$
pair + impair	impair	$8+5=13$
pair × entier	pair	$8\times 7=56$
impair × impair	impair	$7\times 5=35$

Théorème 14

Le carré d'un nombre impair est impair.

Démonstration. Soit n impair. Il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $n=2k+1$. Alors

$$n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1.$$

Comme $2k^2+2k\in\mathbb{Z}$, n^2 est de la forme $2K+1$ avec $K\in\mathbb{Z}$. Par définition, n^2 est impair. □

Exercice 15 : Écrire puis démontrer

Soient n et p deux entiers impairs.

1. Démontrer que $n+p$ est pair.
2. Démontrer que np est impair.

Il existe $k,\ell\in\mathbb{Z}$ tels que $n=2k+1$ et $p=2\ell+1$. Alors

$$n+p=2(k+\ell+1),$$

donc $n+p$ est pair. De plus

$$np=(2k+1)(2\ell+1)=2(2k\ell+k+\ell)+1,$$

donc np est impair.

IV Problèmes de divisibilité

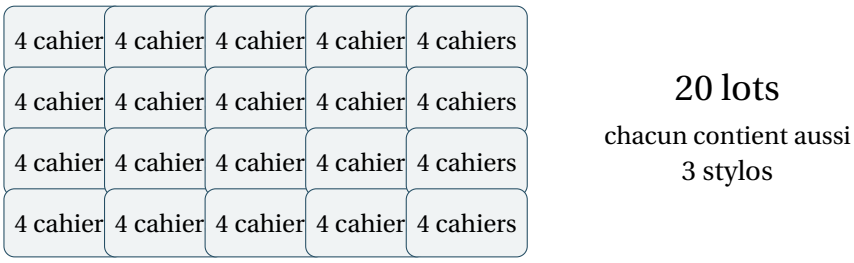
Exemple 16 : Former le plus grand nombre possible de lots

On veut répartir 80 cahiers et 60 stylos en lots identiques, sans reste. Le nombre n de lots doit diviser 80 et 60.

diviseurs positifs de 80 : 1,2,4,5,8,10,16,20,40,80,

diviseurs positifs de 60 : 1,2,3,4,5,6,10,12,15,20,30,60.

Le plus grand diviseur commun est 20. On peut former 20 lots de 4 cahiers et 3 stylos.



Exemple 17 : Deux cycles

Deux signaux clignotent ensemble à midi. Le premier clignote toutes les 12 secondes, le second toutes les 18 secondes. Ils clignoteront de nouveau ensemble après un nombre de secondes multiple de 12 et de 18.

multiples de 12	12	24	$\boxed{36}$	48	60
multiples de 18	18	$\boxed{36}$	54	72	90

Ils clignotent donc de nouveau ensemble 36 secondes après midi.

Exercice 18 : Pavage

Une plaque rectangulaire mesure 168 cm sur 120 cm. On veut la paver avec des carrés identiques, les plus grands possibles, sans découpe.

1. Que doit vérifier la longueur c du côté d'un carré ?
2. Déterminer la plus grande valeur possible de c.
3. Combien de carrés sont nécessaires ?

La longueur entière c doit diviser 168 et 120. Les diviseurs communs positifs sont 1,2,3,4,6,8,12,24, donc $c = 24$ cm. Il faut

$$\frac{168}{24} \times \frac{120}{24} = 7 \times 5 = 35$$

carrés.

V Fractions irréductibles

Définition 19

Une fraction $\frac{a}{b}$, avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, est **irréductible** lorsque a et b n'ont pas d'autre diviseur positif commun que 1.

Méthode 20 : Réduire puis prouver l'irréductibilité

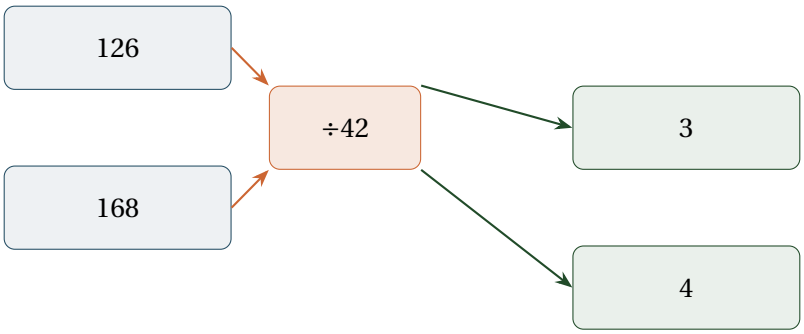
1. Chercher un diviseur commun au numérateur et au dénominateur.
2. Diviser les deux termes par ce même entier non nul.
3. Recommencer si nécessaire.
4. Justifier que les deux termes obtenus n'ont plus de diviseur commun autre que 1.

Exemple 21 : Réduire $\frac{126}{168}$

$$\frac{126}{168} = \frac{42 \times 3}{42 \times 4} = \frac{3}{4}.$$

Les diviseurs positifs de 3 sont 1 et 3, tandis que ceux de 4 sont 1, 2 et 4. Leur seul diviseur commun est 1 : $\frac{3}{4}$ est irréductible.
Une décomposition en facteurs premiers, déjà rencontrée au collège, permet aussi de voir les facteurs communs :

$$\frac{126}{168} = \frac{2 \times 3^2 \times 7}{2^3 \times 3 \times 7} = \frac{3}{4}.$$



Exercice 22 : Rendre irréductible

Présenter sous forme irréductible :

$$\frac{84}{126}, \qquad \frac{512}{40}, \qquad \frac{-225}{150}.$$

$$\frac{84}{126} = \frac{2}{3}, \qquad \frac{512}{40} = \frac{64}{5}, \qquad \frac{-225}{150} = -\frac{3}{2}.$$

Les couples (2,3), (64,5) et (3,2) n'ont chacun aucun diviseur positif commun autre que 1.

À retenir

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$: les naturels sont des entiers relatifs.
- a est un multiple de b si $a = kb$ pour un entier k ; alors b divise a.
- Un entier pair s'écrit $2k$, un entier impair s'écrit $2k+1$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
- Pour prouver une propriété, traduire les définitions par des égalités, calculer, puis reconnaître la forme attendue.
- Une fraction est irréductible lorsque son numérateur et son dénominateur n'ont pas d'autre diviseur positif commun que 1.

Exercice 23 : Bilan express

Justifier chaque réponse à partir d'une définition ou d'un calcul du cours.

1. 7 divise-t-il 234 ?
2. Quelle est la parité de $(2n+3)^2$, pour $n \in \mathbb{Z}$?
3. Rendre $\frac{330}{462}$ irréductible.
4. Déterminer le plus grand multiple de 18 inférieur ou égal à 500.

1. Non : $234 = 7 \times 33 + 3$, donc le quotient n'est pas entier.
2. $2n+3 = 2(n+1)+1$ est impair ; son carré est donc impair.
3. $\frac{330}{462} = \frac{66 \times 5}{66 \times 7} = \frac{5}{7}$, et 5 et 7 n'ont que 1 comme diviseur positif commun.
4. $500 = 27 \times 18 + 14$, donc le nombre recherché est $500 - 14 = 486$.