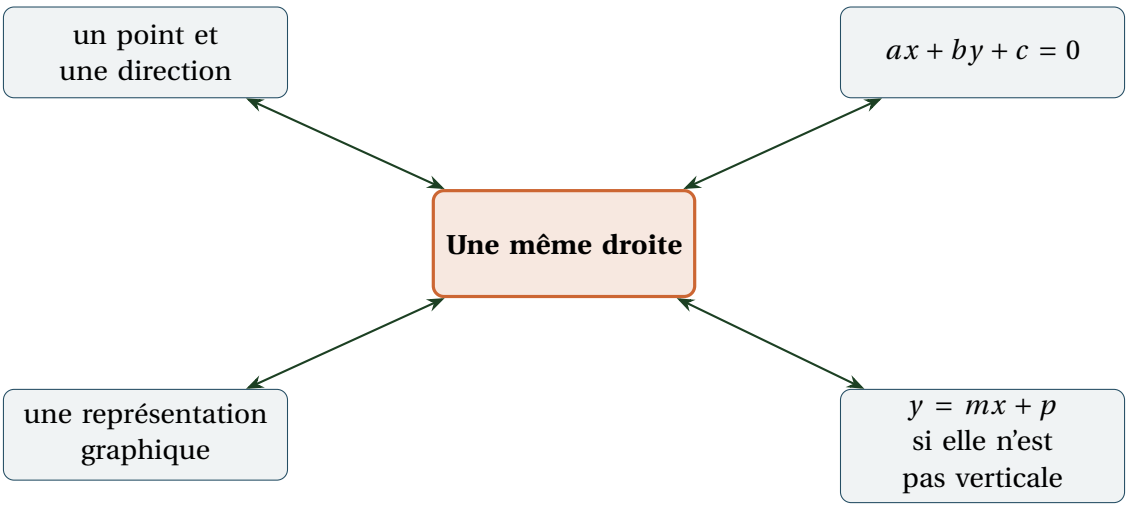
DROITES DU PLAN



Méthode 1 : Changer de registre

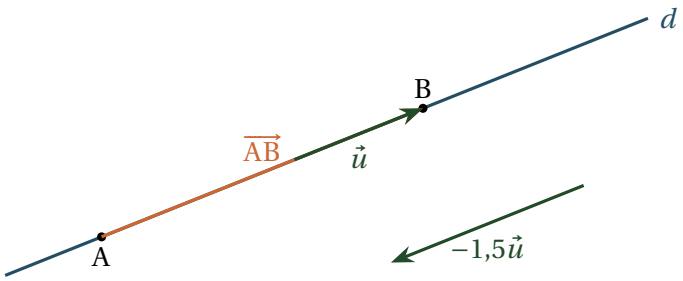
Une droite peut être décrite par une figure, des points, une direction ou une équation. Le bon réflexe est de choisir la description qui rend le problème le plus simple, puis de **vérifier** le résultat dans un autre registre.

I Une droite et sa direction

I.1 Vecteur directeur

Définition 2

Un vecteur $\vec{u}$ **non nul** est un **vecteur directeur** d'une droite d lorsqu'il possède la même direction que d.



Propriété 3

- Si A et B sont deux points distincts de d, alors $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de d.
- Tous les vecteurs directeurs d'une même droite sont non nuls et colinéaires entre eux.
- Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

Exemple 4

Pour A$(-2\,;5)$ et B$(3\,;1)$,

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-(-2)\\1-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-4\end{pmatrix}.$$

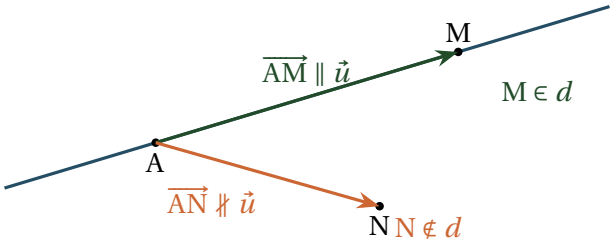
Les vecteurs $\begin{pmatrix}5\\-4\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-5\\4\end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix}10\\-8\end{pmatrix}$ dirigent donc la droite (AB). Le vecteur nul ne la dirige pas.

I.2 Caractériser les points d'une droite

Théorème 5

Soit A un point et $\vec{u}$ un vecteur non nul. Il existe une unique droite d passant par A et dirigée par $\vec{u}$. Pour tout point M,

$$\boxed{\text{M} \in d \iff \overrightarrow{\text{AM}} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires.}}$$



II Équation cartésienne

II.1 Définition et appartenance

Théorème 6

Toute droite du plan possède une équation de la forme

$$\boxed{ax + by + c = 0},$$

où a, b et c sont réels et où a et b ne sont **pas tous les deux nuls**. Une telle équation est appelée **équation cartésienne** de la droite.
Réciproquement, si $(a\,;b) \neq (0\,;0)$, l'ensemble des points $\text{M}(x\,;y)$ vérifiant $ax + by + c = 0$ est une droite de vecteur directeur

$$\boxed{\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}}.$$

Méthode 7 : Tester l'appartenance d'un point

Pour savoir si $\text{M}(x_\text{M}\,;y_\text{M})$ appartient à la droite $ax + by + c = 0$, on substitue x_M à x et y_M à y :

$$\text{M} \in d \iff ax_\text{M} + by_\text{M} + c = 0.$$

Exemple 8

Soit $d : 2x - 3y + 6 = 0$.

- $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d.
- $\text{A}(0\,;2) \in d$, car $2 \times 0 - 3 \times 2 + 6 = 0$.
- $\text{C}(3\,;3) \notin d$, car $2 \times 3 - 3 \times 3 + 6 = 3 \neq 0$.

Remarque II.1. Une droite possède une infinité d'équations cartésiennes. Par exemple,

$$2x - 3y + 6 = 0, \qquad 4x - 6y + 12 = 0$$

décrivent la même droite. On a multiplié tous les coefficients par 2.

II.2 Démonstration de la forme générale

Démonstration. Soit d la droite passant par $A(x_A\,;y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}\neq\vec{0}$. Pour $M(x\,;y)$,

$$M\in d \iff \det\left(\overrightarrow{AM},\vec{u}\right)=0 \iff \begin{vmatrix} x-x_A & \alpha\\ y-y_A & \beta\end{vmatrix}=0.$$

Ainsi,

$$\beta(x-x_A)-\alpha(y-y_A)=0 \iff \underbrace{\beta}_{a}x+\underbrace{(-\alpha)}_{b}y+\underbrace{(-\beta x_A+\alpha y_A)}_{c}=0.$$

Comme $(\alpha\,;\beta)\neq(0\,;0)$, les nombres $a=\beta$ et $b=-\alpha$ ne sont pas tous deux nuls. On obtient bien une équation cartésienne, et

$$\begin{pmatrix}-b\\ a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\vec{u}.$$

□

$\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ — inverse l'ordre et change un signe — $\beta x-\alpha y+c=0$

$\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\ a\end{pmatrix}$ dirige
$ax+by+c=0$

III Équation réduite et pente

III.1 Droites non verticales

Définition 9

Toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées possède une unique équation de la forme

$$\boxed{y=mx+p}.$$

C'est son **équation réduite**. Le réel m est son **coefficient directeur**, ou sa **pente**, et p est son **ordonnée à l'origine**.

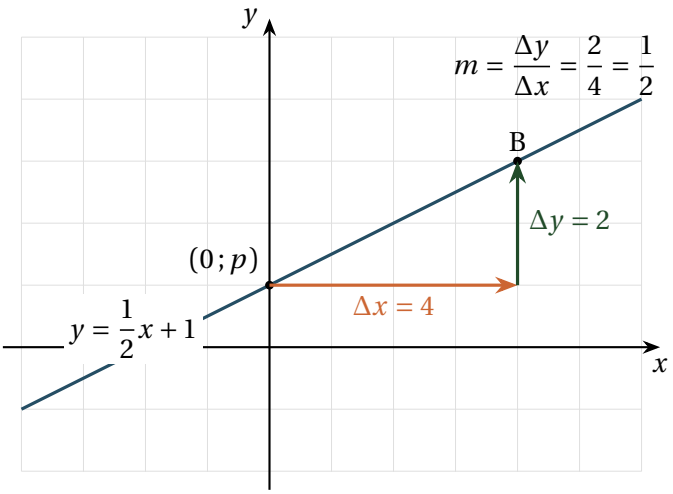
Propriété 10

La droite $y=mx+p$ passe par $(0\,;p)$ et admet pour vecteur directeur

$$\boxed{\vec{u}\begin{pmatrix}1\\ m\end{pmatrix}}.$$

Si $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ sont deux points de la droite avec $x_A\neq x_B$, alors

$$\boxed{m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}}.$$



Remarque III.1. Une droite verticale n'a ni pente finie ni équation réduite $y = mx + p$. Elle possède une équation de la forme

$$\boxed{x = k}.$$

III.2 Passer d'une équation à l'autre

Méthode 11 : Réduire une équation cartésienne

Dans $ax + by + c = 0$:

- si $b \neq 0$, on isole y :
$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b};$$
- si $b = 0$, alors $a \neq 0$ et $x = -\frac{c}{a}$: la droite est verticale.

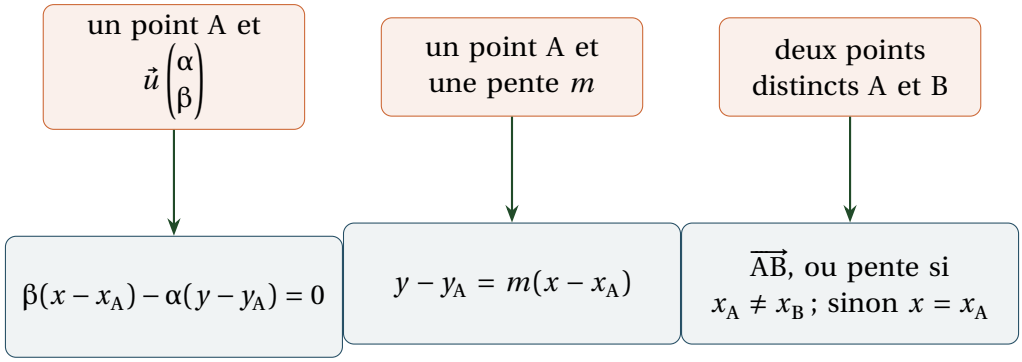
Exemple 12

$$2x - 3y + 6 = 0 \iff -3y = -2x - 6 \iff y = \frac{2}{3}x + 2.$$

La pente vaut $\frac{2}{3}$, l'ordonnée à l'origine vaut 2, et $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur.

IV Déterminer et tracer une droite

IV.1 Trois données possibles



Méthode 13 : Un point et un vecteur directeur

Si d passe par $A(x_A\,;y_A)$ et est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$, on peut :

1. écrire une équation de la forme $\beta x-\alpha y+c=0$;
2. utiliser $A\in d$ pour déterminer c.

Exemple 14

La droite passant par $A(3\,;1)$ et dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\ 5\end{pmatrix}$ possède une équation de la forme $5x+y+c=0$. Comme $A\in d$,

$$5\times 3+1+c=0, \qquad \text{donc } c=-16.$$

Une équation de d est $\boxed{5x+y-16=0}$.

Méthode 15 : Deux points distincts

Pour déterminer une équation de (AB) :

- la méthode cartésienne avec $\overrightarrow{AB}$ fonctionne toujours ;
- si $x_A\neq x_B$, on peut aussi calculer m, puis utiliser $y_A=mx_A+p$;
- si $x_A=x_B$, la droite est verticale et a pour équation $x=x_A$.

Exemple 16

Soient $A(-2\,;3)$ et $B(4\,;-1)$. On a

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\ -4\end{pmatrix}.$$

Une équation cartésienne est donc de la forme $2x+3y+c=0$. Avec A,

$$2\times(-2)+3\times 3+c=0, \qquad c=-5.$$

Ainsi,

$$\boxed{2x+3y-5=0} \qquad \text{ou} \qquad \boxed{y=-\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}}.$$

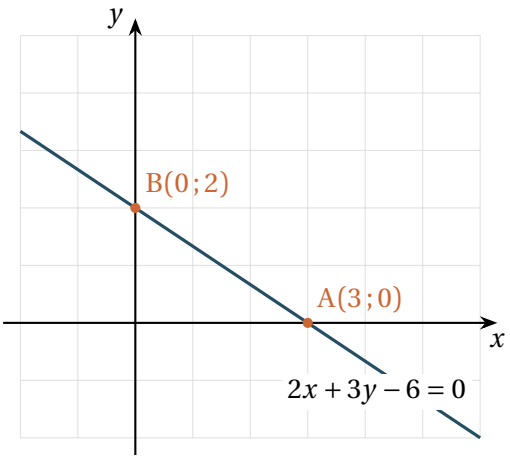
La substitution des coordonnées de B permet de vérifier l'équation.

IV.2 Tracer à partir d'une équation

Méthode 17 : Obtenir deux points

Une droite est entièrement déterminée par deux points distincts.

- Pour $y=mx+p$, placer $(0\,;p)$, puis utiliser la pente.
- Pour $ax+by+c=0$, choisir deux valeurs simples de x ou de y, puis calculer l'autre coordonnée. On peut utiliser les intersections avec les axes lorsqu'elles sont distinctes.
- Pour $x=k$, tracer la verticale passant par $(k\,;0)$.



Exercice 18 : Construire une droite

Tracer la droite $d : 2x + 3y - 6 = 0$, puis donner un vecteur directeur et son équation réduite. Les points A(3 ; 0) et B(0 ; 2) appartiennent à d. Un vecteur directeur est $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, et

$$d : y = -\frac{2}{3}x + 2.$$

V Positions relatives et intersection

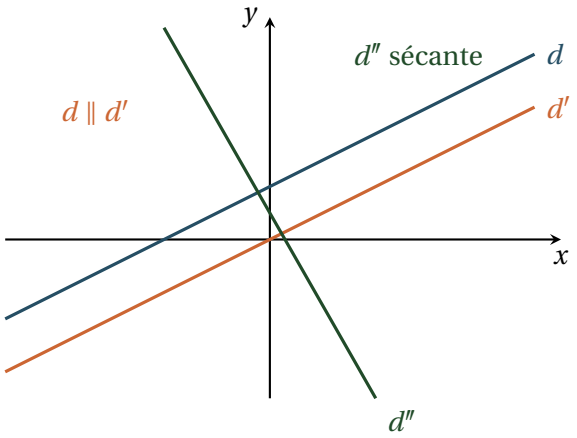
V.1 Parallèles ou sécantes

Théorème 19

Soient deux droites non verticales

$$d : y = mx + p \qquad \text{et} \qquad d' : y = m'x + p'.$$

- $d \parallel d' \iff m = m'$.
- Si $m = m'$ et $p \neq p'$, elles sont strictement parallèles.
- Si $m = m'$ et $p = p'$, elles sont confondues.
- Si $m \neq m'$, elles sont sécantes.



Propriété 20

Les droites

$$d : ax + by + c = 0 \quad \text{et} \quad d' : a'x + b'y + c' = 0$$

sont parallèles si et seulement si

$$\boxed{ab' - a'b = 0}.$$

Démonstration. Les vecteurs $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -b' \\ a' \end{pmatrix}$ dirigent respectivement d et d'. Les droites sont parallèles si et seulement si ces vecteurs sont colinéaires, c'est-à-dire si

$$\begin{vmatrix} -b & -b' \\ a & a' \end{vmatrix} = -ba' + ab' = 0.$$

□

Remarque V.1. Deux droites verticales sont parallèles. Une droite verticale et une droite possédant une équation réduite $y = mx + p$ sont toujours sécantes.

V.2 Calculer un point d'intersection

Méthode 21 : Résoudre le système des deux équations

Si deux droites sécantes sont données par

$$y = mx + p \qquad \text{et} \qquad y = m'x + p',$$

les coordonnées de leur point d'intersection vérifient les deux équations. On égalise donc les deux expressions de y, on calcule x, puis y.

Exemple 22

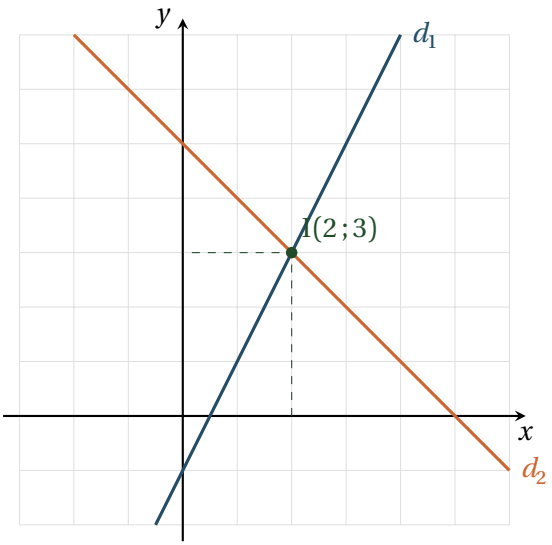
Soient $d_1 : y = 2x - 1$ et $d_2 : y = -x + 5$. Leurs pentes sont différentes : elles sont sécantes. À leur intersection,

$$\begin{cases} y = 2x - 1, \\ y = -x + 5 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad 2x - 1 = -x + 5 \quad \Longrightarrow \quad x = 2.$$

Puis $y = 2 \times 2 - 1 = 3$. Le point d'intersection est

$$\boxed{\mathrm{I}(2\,;3)}.$$

On vérifie : $-2 + 5 = 3$.



V.3 Alignement

Méthode 23 : Choisir un critère

Pour montrer que A, B et C sont alignés, on peut :

- vérifier que $\det(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}) = 0$;
- déterminer une équation de (AB), puis vérifier que C la satisfait ;
- comparer les pentes de (AB) et (AC), si ces droites ne sont pas verticales.

Exercice 24 : Alignement et intersection

1. Les points $\mathrm{A}(-1\,;2)$, $\mathrm{B}(2\,;4)$ et $\mathrm{C}(5\,;6)$ sont-ils alignés ?
2. Déterminer le point d'intersection des droites $d : y = 3x - 4$ et $d' : y = -x + 8$.

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{\mathrm{AC}}\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \det(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}) = 3 \times 4 - 2 \times 6 = 0.$$

Les trois points sont alignés. Ensuite,

$$3x - 4 = -x + 8 \iff 4x = 12 \iff x = 3, \qquad y = 5.$$

Les deux droites se coupent en $(3\,;5)$.

Exercice 25 : Synthèse

Soit $\mathrm{P}(2\,;-1)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par P et dirigée par $\vec{u}$.
2. La droite d' est parallèle à d et passe par $\mathrm{Q}(-1\,;4)$. Déterminer une équation de d'.
3. Les points P, Q et $\mathrm{R}(5\,;1)$ sont-ils alignés ?

Une équation de d est $2x-3y+c=0$. Comme $\mathrm{P}\in d$, $4+3+c=0$, donc

$$d : 2x-3y-7=0.$$

Une équation de d' est $2x-3y+c'=0$. Avec Q, $-2-12+c'=0$, donc

$$d' : 2x-3y+14=0.$$

Enfin,

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{\mathrm{PR}}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}, \qquad \det(\overrightarrow{\mathrm{PQ}},\overrightarrow{\mathrm{PR}}) = -3\times 2-5\times 3=-21\neq 0.$$

Les trois points ne sont pas alignés.

À retenir

- $\mathrm{M}\in d \iff \overrightarrow{\mathrm{AM}}$ est colinéaire à un vecteur directeur de d.
- Une droite d'équation $ax+by+c=0$ admet $\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ pour vecteur directeur ; si $b\neq 0$, alors $y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$.
- Pour $x_{\mathrm{A}}\neq x_{\mathrm{B}}$, $m=\dfrac{y_{\mathrm{B}}-y_{\mathrm{A}}}{x_{\mathrm{B}}-x_{\mathrm{A}}}$. Une droite verticale a une équation $x=k$.
- Parallélisme : mêmes pentes, ou vecteurs directeurs colinéaires. Une intersection vérifie les deux équations.