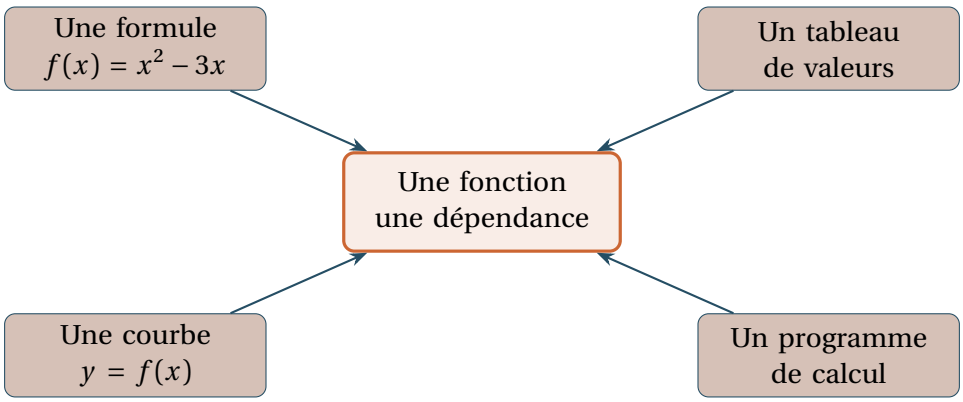
GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS



Changer de représentation permet de choisir l'outil le plus adapté : calculer, lire, comparer, résoudre ou prévoir.

I Fonction et domaine d'étude

I.1 Une grandeur dépend d'une autre

Définition 1

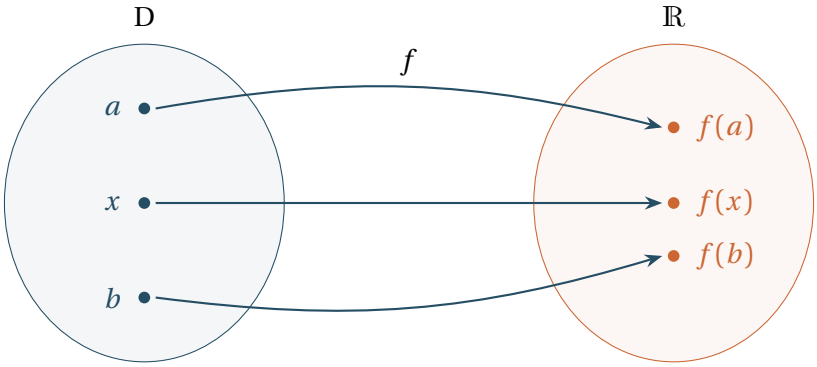
Soit D un intervalle ou une réunion finie d'intervalles de $\mathbb{R}$. Définir une **fonction** f sur D, c'est associer à chaque réel $x \in D$ un **unique** réel, noté $f(x)$.

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto f(x).$$

L'ensemble D est appelé **ensemble de définition** de f.

Définition 2

Si $x \in D$, le nombre $f(x)$ est l'**image** de x par f. Si $f(x) = y$, alors x est **un antécédent** de y par f.



Un nombre de D a une seule image.
Une image peut avoir plusieurs antécédents, un seul ou aucun.

Exemple 3 : Une température au cours du temps

On note $T(t)$ la température, en °C, mesurée t heures après minuit. Le domaine d'étude est $D = [0;24]$. Si $T(10) = 13$, alors :

- l'image de 10 par T est 13 ;
- 10 est un antécédent de 13 par T.

Une même température peut être atteinte le matin puis le soir : elle possède alors plusieurs antécédents.

I.2 Déterminer un domaine

Méthode 4 : Chercher les valeurs admissibles

Pour déterminer un ensemble de définition donné par une expression :

- on interdit les valeurs qui annulent un dénominateur ;
- on impose que l'expression sous une racine carrée soit positive ou nulle ;
- on tient compte des contraintes du contexte.

Exemple 5

Pour

$$g(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x-1},$$

il faut $x+2 \geqslant 0$, donc $x \geqslant -2$, et $x \neq 1$. Ainsi

$$\mathrm{D}_g = [-2\,;1[\cup]1\,;+\infty[.$$

Remarque I.1. Le **domaine d'étude** peut être plus petit que l'ensemble de définition de l'expression. Par exemple, la formule $h(t) = 5t^2$ a un sens pour tout réel t, mais si t représente la durée d'une chute observée pendant trois secondes, on étudie h seulement sur $[0\,;3]$.

Exercice 6 : Domaines

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{3x+1}{x+4}, \qquad g(x) = \sqrt{7-2x}, \qquad h(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x-5}.$$

$$\mathrm{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-4\}, \qquad \mathrm{D}_g =]-\infty\,;\tfrac{7}{2}], \qquad \mathrm{D}_h = [1\,;5[\cup]5\,;+\infty[.$$

I.3 Représentations d'une même fonction

Propriété 7

Une fonction peut être définie ou décrite par :

- une **formule** ou un programme de calcul ;
- un **tableau de valeurs**, qui ne montre que certaines images ;
- une **courbe représentative**.

Exemple 8

La fonction $f : x \mapsto x^2 - 2x - 3$ admet le tableau de valeurs suivant :

x	-2	-1	0	1	3
$f(x)$	5	0	-3	-4	0

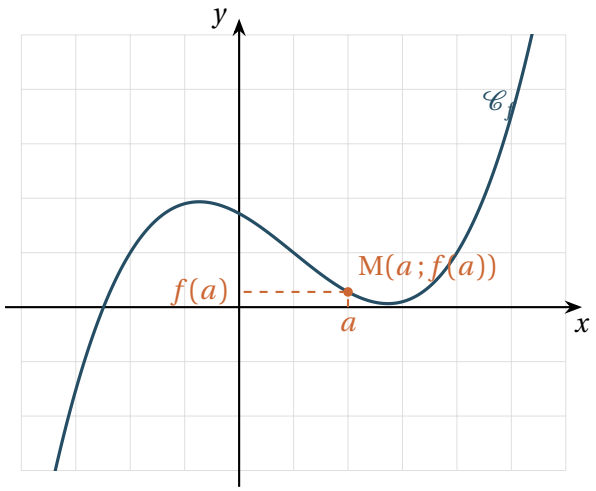
II Courbe représentative

Définition 9

Dans un repère, la **courbe représentative** $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f est l'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que

$$\boxed{x \in D_f \quad \text{et} \quad y = f(x)}.$$

On dit que $\mathscr{C}_f$ a pour équation $y = f(x)$.



Propriété 10

Pour un point $A(a\,;b)$,

$$A \in \mathscr{C}_f \iff a \in D_f \text{ et } b = f(a).$$

Exemple 11

Soit $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

- $A(3\,;0) \in \mathscr{C}_f$, car $f(3) = 9 - 6 - 3 = 0$.
- $B(2\,;0) \notin \mathscr{C}_f$, car $f(2) = 4 - 4 - 3 = -3 \neq 0$.
- Si $C(-1\,;y) \in \mathscr{C}_f$, alors $y = f(-1) = 1 + 2 - 3 = 0$.

Méthode 12 : Lire une image ou des antécédents

- Pour lire $f(a)$, on part de a sur l'axe des abscisses, on rejoint verticalement la courbe, puis on lit l'ordonnée.
- Pour chercher les antécédents de k, on trace mentalement la droite horizontale $y = k$ et on lit les abscisses de ses points d'intersection avec $\mathscr{C}_f$.

Une lecture graphique donne généralement des valeurs **approchées**.

III Fonctions affines

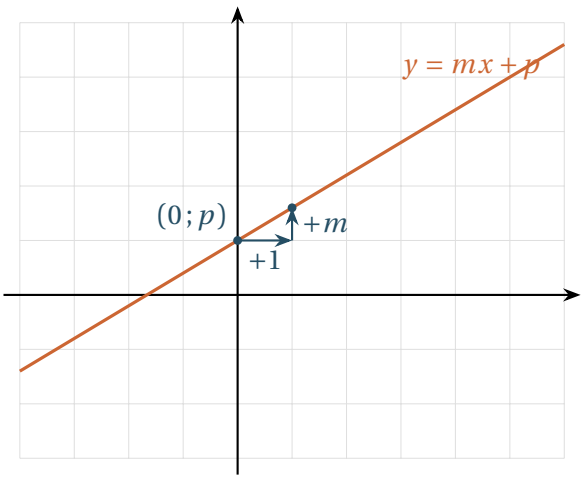
III.1 Expression et représentation

Définition 13

Une fonction f est **affine** lorsqu'il existe deux réels m et p tels que

$$\boxed{f(x) = mx + p}.$$

Sa courbe représentative est une droite non parallèle à l'axe des ordonnées. Le nombre m est le **coefficient directeur** et $p = f(0)$ est l'**ordonnée à l'origine**.



Propriété 14 : Taux d'accroissement

Pour deux réels distincts a et b,

$$\boxed{m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}.$$

Démonstration. Puisque $f(x) = mx + p$,

$$f(b) - f(a) = (mb + p) - (ma + p) = m(b - a).$$

Comme $b - a \neq 0$, on peut diviser par $b - a$. □

Méthode 15 : Déterminer une fonction affine

Si une droite passe par A$(-2\,;4)$ et B$(3\,;-1)$, alors

$$m = \frac{-1-4}{3-(-2)} = -1.$$

L'expression est donc $f(x) = -x + p$. Comme $f(3) = -1$, $-3 + p = -1$, d'où $p = 2$. Finalement, $\boxed{f(x) = -x + 2}$.

III.2 Variations et signe

Théorème 16

Pour $f(x) = mx + p$:

- si $m > 0$, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$;
- si $m < 0$, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$;
- si $m = 0$, f est constante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. Soient $a < b$. Alors $b - a > 0$ et

$$f(b) - f(a) = m(b - a).$$

Cette différence a donc le signe de m. Si $m > 0$, $f(a) < f(b)$; si $m < 0$, $f(a) > f(b)$; si $m = 0$, $f(a) = f(b)$. □

Propriété 17

Si $m \neq 0$, la fonction affine $f(x) = mx + p$ s'annule en $x_0 = -\dfrac{p}{m}$. Son signe se lit sur la droite :

	$x < x_0$	$x = x_0$	$x > x_0$
$m > 0$	$-$	0	$+$
$m < 0$	$+$	0	$-$

Exemple 18

Pour $f(x) = 6 - 2x$, on a $m = -2 < 0$ et $f(x) = 0$ pour $x = 3$. Ainsi, $f(x) > 0$ sur $]-\infty;3[$, $f(3) = 0$ et $f(x) < 0$ sur $]3\,;+\infty[$.

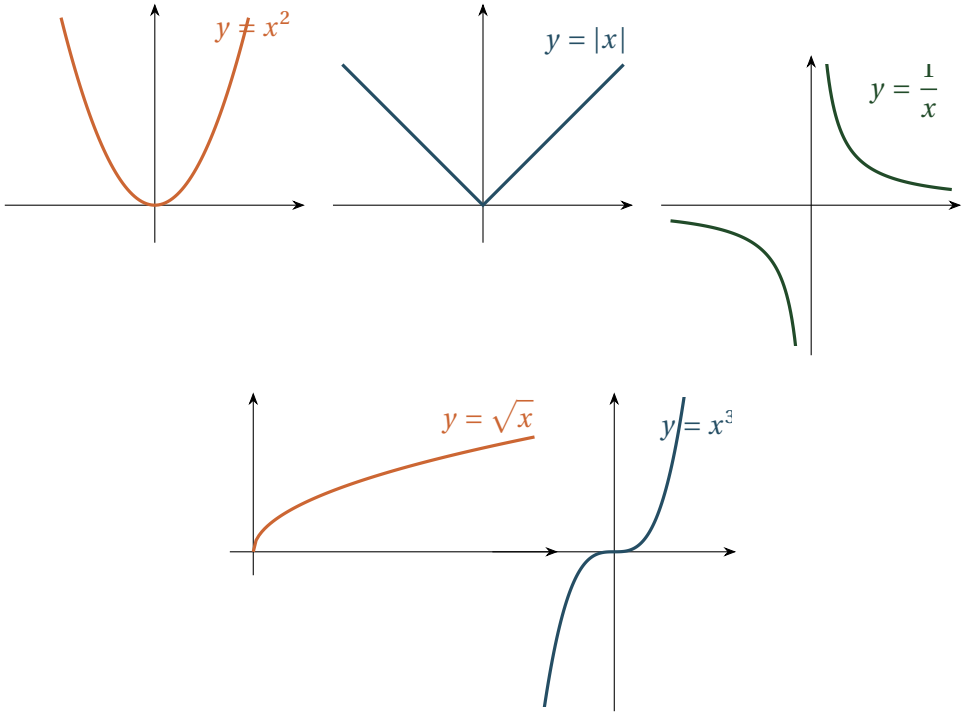
IV Fonctions de référence

IV.1 Un répertoire graphique

Définition 19

On appelle :

- **fonction valeur absolue** la fonction $x \mapsto |x|$ définie sur $\mathbb{R}$;
- **fonction carré** la fonction $x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$;
- **fonction inverse** la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- **fonction racine carrée** la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ définie sur $[0\,;+\infty[$;
- **fonction cube** la fonction $x \mapsto x^3$ définie sur $\mathbb{R}$.



Fonction	Expression	Domaine	Signe et variations
Valeur absolue	$\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}$	positive ; décroissante sur $]-\infty\,;0]$, croissante sur $[0\,;+\infty[$
Carré	x^2	$\mathbb{R}$	positive ; décroissante sur $]-\infty\,;0]$, croissante sur $[0\,;+\infty[$
Inverse	$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	signe de x ; décroissante sur chacun des intervalles $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$
Racine carrée	$\sqrt{x}$	$[0\,;+\infty[$	positive et croissante
Cube	x^3	$\mathbb{R}$	signe de x et croissante

Remarque IV.1. La fonction inverse est décroissante sur chacun des deux intervalles de son domaine. Elle n'est pas décroissante sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$: par exemple, $-1 < 1$, mais $\dfrac{1}{-1} < \dfrac{1}{1}$.

IV.2 Démontrer des variations

Théorème 20 : Variations de la fonction carré

La fonction $x \mapsto x^2$ est décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et croissante sur $[0\,;+\infty[$.

Démonstration. Soient $0 \leqslant a < b$. Alors

$$b^2 - a^2 = (b-a)(b+a) > 0,$$

donc $a^2 < b^2$: la fonction carré est croissante sur $[0\,;+\infty[$.
Si $a < b \leqslant 0$, alors $a - b < 0$ et $a + b < 0$, donc

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) > 0.$$

Ainsi $a^2 > b^2$: la fonction carré est décroissante sur $]-\infty\,;0]$. □

Théorème 21 : Variations de la fonction inverse

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$.

Démonstration. Soient $a < b$ deux réels non nuls de même signe. Alors $ab > 0$ et

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab} < 0.$$

Donc $\dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$: l'ordre est inversé sur chacun des deux intervalles. □

Théorème 22 : Position relative de $y = x$ et $y = x^2$

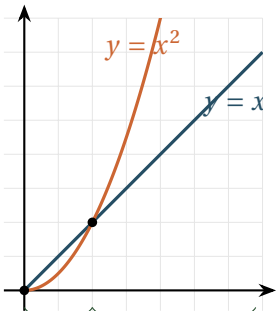
Pour $x \geqslant 0$,

$$\begin{cases} x^2 \leqslant x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ x^2 \geqslant x & \text{si } x \geqslant 1. \end{cases}$$

Démonstration. On étudie $x^2 - x = x(x-1)$. Pour $x \geqslant 0$, son signe est celui de $x - 1$. Il est donc négatif ou nul sur $[0\,;1]$, puis positif ou nul sur $[1\,;+\infty[$. □

Exemple 23 : Comparer sans calculatrice

Comme $-3 < -2 \leqslant 0$ et que la fonction carré est décroissante sur $]-\infty\,;0]$, on a $(-3)^2 > (-2)^2$. De même, $4 < 5$ et la fonction inverse est décroissante sur $]0\,;+\infty[$, donc $\dfrac{1}{4} > \dfrac{1}{5}$.



Exercice 24 : Équations de référence

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$x^2 = 9, \quad x^2 = -4, \quad |x| = 3, \quad \sqrt{x} = 5, \quad x^3 = -8, \quad \frac{1}{x} = 4.$$

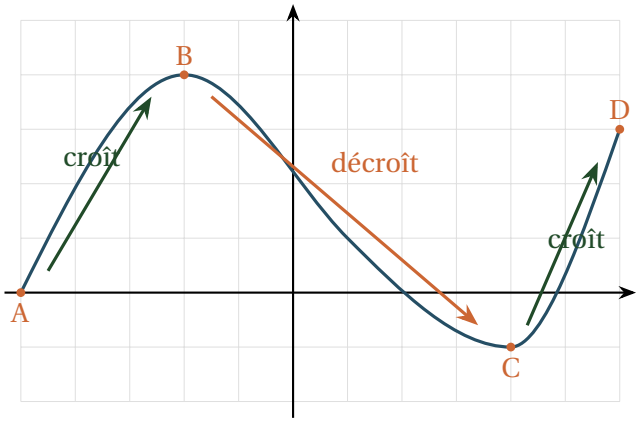
$$\{-3\,;3\}, \quad \varnothing, \quad \{-3\,;3\}, \quad \{25\}, \quad \{-2\}, \quad \left\{\frac{1}{4}\right\}.$$

V Variations et extrémums

Définition 25

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- f est **croissante** sur I si, pour tous $a,b \in$ I,
$$a \leqslant b \Longrightarrow f(a) \leqslant f(b).$$
- f est **décroissante** sur I si, pour tous $a,b \in$ I,
$$a \leqslant b \Longrightarrow f(a) \geqslant f(b).$$
- Une fonction est **monotone** sur I si elle y est croissante ou décroissante.



x	-5		-2		4		6
$f(x)$	0	↗	4	↘	-1	↗	3

Définition 26

Soit f définie sur un intervalle I.

- M est le **maximum** de f sur I si $f(x) \leqslant$ M pour tout $x \in$ I, et si M est atteint.
- m est le **minimum** de f sur I si $f(x) \geqslant m$ pour tout $x \in$ I, et si m est atteint.

Un maximum ou un minimum est un **extrémum**.

Exemple 27

Sur $[-5;6]$, la fonction représentée ci-dessus admet :

- un maximum égal à 4, atteint pour $x = -2$;
- un minimum égal à -1, atteint pour $x = 4$.

Attention : l'extrémum est une **image**, tandis que l'abscisse indique où il est atteint.

VI Signe d'un produit ou d'un quotient

Remarque VI.1. Première rencontre guidée. On relie ici les signes des facteurs à la position de la courbe par rapport à l'axe des abscisses. Au chapitre 9, on construira ces tableaux de façon autonome pour résoudre des inéquations, en contrôlant le domaine et les valeurs interdites.

Définition 28

Une fonction f est **positive** sur un intervalle I lorsque $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in$ I. Elle est **négative** sur I lorsque $f(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in$ I.

Méthode 29 : Construire un tableau de signes

1. Factoriser l'expression si nécessaire.
2. Déterminer les zéros de chaque facteur et les valeurs interdites.
3. Étudier le signe de chaque facteur affine.
4. Appliquer la règle des signes sur la dernière ligne.

Exemple 30 : Un quotient

Étudions le signe de

$$h(x) = \frac{(x+1)(2x-3)}{x-2}.$$

Son domaine est $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Les changements possibles ont lieu en -1, $\frac{3}{2}$ et 2.

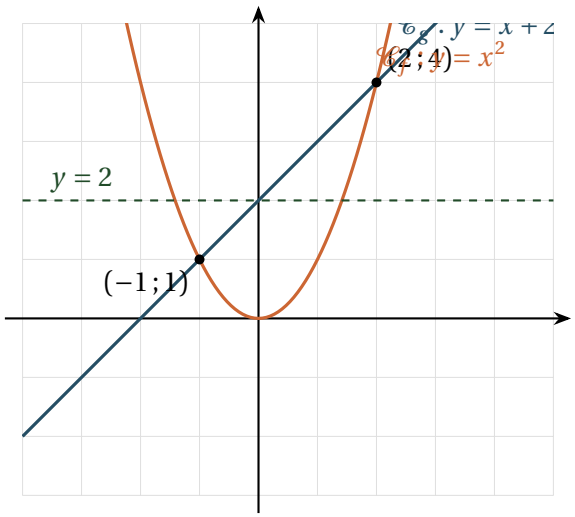
x	$]-\infty;-1[$	-1	$]-1;\frac{3}{2}[$	$\frac{3}{2}$	$]\frac{3}{2};2[$	2	$]2;+\infty[$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$2x-3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	interdit	$+$

Ainsi, par exemple,

$$h(x) \geqslant 0 \iff x \in \left[-1;\frac{3}{2}\right] \cup]2;+\infty[.$$

VII Résoudre et modéliser

VII.1 Choisir une méthode



Propriété 31

- Résoudre $f(x) = k$ revient à chercher les abscisses des intersections de $\mathscr{C}_f$ avec la droite $y = k$.
- Résoudre $f(x) < k$ revient à chercher où $\mathscr{C}_f$ est sous la droite $y = k$.
- Résoudre $f(x) = g(x)$ revient à chercher les abscisses des intersections de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
- Résoudre $f(x) < g(x)$ revient à chercher où $\mathscr{C}_f$ est sous $\mathscr{C}_g$.

Exemple 32

Sur la figure :

$$x^2 = x+2 \iff x \in \{-1\,;2\}, \qquad x^2 < x+2 \iff x \in]-1\,;2[.$$

De même, $x^2 = 2$ a pour solutions $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$, tandis que

$$x^2 < 2 \iff x \in]-\sqrt{2}\,;\sqrt{2}[.$$

Méthode 33 : Graphique, algèbre ou numérique ?

- La méthode **graphique** donne une vue globale mais souvent des valeurs approchées.
- La méthode **algébrique** donne des résultats exacts lorsqu'on sait transformer l'expression.
- La méthode **numérique** permet d'approcher une solution ou un extrémum inaccessible par un calcul simple.

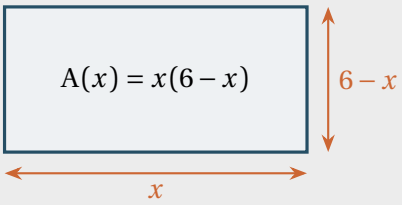
On peut combiner les méthodes : conjecturer graphiquement, démontrer algébriquement, puis approcher numériquement.

VII.2 Un problème d'optimisation

Exercice 34 : Une aire maximale

Un rectangle a un demi-périmètre égal à 6 cm. On note x sa longueur.

1. Exprimer sa largeur et préciser les valeurs possibles de x.
2. Montrer que son aire est $\mathrm{A}(x) = x(6-x)$.
3. Déterminer l'aire maximale et les dimensions correspondantes.



La largeur est $6-x$, avec $x \in]0\,;6[$. De plus,

$$\mathrm{A}(x) = x(6-x) = 6x - x^2 = 9 - (x-3)^2.$$

Or $(x-3)^2 \geqslant 0$, donc $\mathrm{A}(x) \leqslant 9$. Le maximum vaut $\boxed{9\ \text{cm}^2}$ et est atteint pour $x = 3$. Le rectangle optimal est donc un carré de côté 3 cm.

À retenir

- Toujours préciser le domaine étudié.
- Une courbe $y = f(x)$ relie chaque abscisse x à son unique image $f(x)$.
- Une fonction affine relie formule, droite, taux d'accroissement, variations et signe.
- Le répertoire des fonctions de référence aide à comparer et à résoudre.
- Pour une résolution ou une optimisation, choisir entre lecture graphique, calcul exact et approximation numérique ; reprendre le balayage de l'activité AN1 du carnet partagé.