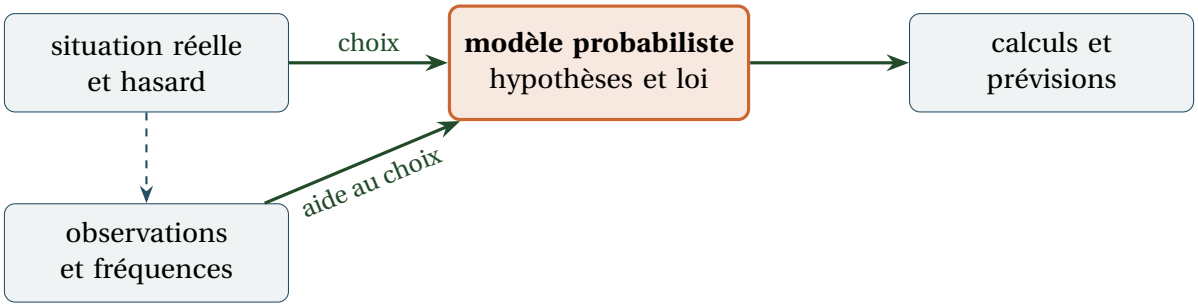
PROBABILITÉS



Méthode 1 : Distinguer réalité et modèle

Une probabilité appartient à un **modèle choisi**. Dire qu'une pièce est équilibrée revient à faire l'hypothèse $P(\text{Pile}) = P(\text{Face}) = \frac{1}{2}$. Cette équiprobabilité ne se démontre pas à partir du seul objet réel : on l'admet ou on la confronte à des observations.

I Modèle probabiliste et fréquences

I.1 Issues, univers et évènements

Définition 2

- Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on ne connaît pas à l'avance le résultat.
- Une **issue** est un résultat possible.
- L'ensemble de toutes les issues est l'**univers**, noté Ω.
- Un **évènement** est un ensemble d'issues, donc une partie de Ω.
- L'évènement impossible est $\emptyset$ et l'évènement certain est Ω.

Exemple 3

On lance un dé cubique et on lit le numéro obtenu :

$$\Omega = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}.$$

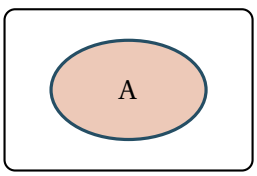
Si A est l'évènement « obtenir un nombre pair » et B l'évènement « obtenir un multiple de 3 », alors

$$A = \{2\,;4\,;6\}, \qquad B = \{3\,;6\}.$$

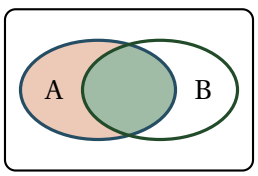
Définition 4

Soient A et B deux évènements.

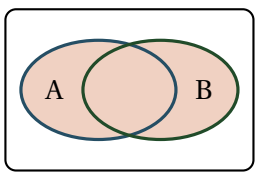
- $\overline{A}$ est l'évènement contraire de A.
- $A \cap B$ est réalisé lorsque A **et** B le sont.
- $A \cup B$ est réalisé lorsqu'**au moins un** des évènements A ou B l'est.



évènement A



$A \cap B$



$A \cup B$

I.2 Loi de probabilité et équiprobabilité

Définition 5

Sur un univers fini $\Omega = \{e_1 ; e_2 ; \dots ; e_n\}$, une **loi de probabilité** associe à chaque issue e_i un nombre p_i tel que

$$0 \leqslant p_i \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1.$$

La probabilité $\mathrm{P}(\mathrm{A})$ d'un évènement A est la somme des probabilités des issues qui le réalisent.

Propriété 6

Pour tous évènements A et B,

$$\mathrm{P}(\varnothing) = 0, \qquad \mathrm{P}(\Omega) = 1, \qquad \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{A}),$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\mathrm{B}) - \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}).$$

Propriété 7 : Équiprobabilité

Si toutes les issues ont la même probabilité, alors

$$\boxed{\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \frac{\mathrm{Card}\,(\mathrm{A})}{\mathrm{Card}\,(\Omega)}}.$$

Remarque I.1. « Au hasard » signifie que l'on utilise un procédé de tirage précis. Il faut encore expliquer pourquoi les issues retenues sont équiprobables. Dans un tirage uniforme d'une personne parmi une population, ce sont les **personnes** qui sont équiprobables, pas nécessairement les catégories auxquelles elles appartiennent.

Exercice 8 : Réactiver les automatismes

On reprend le dé supposé équilibré et les évènements A et B précédents.

1. Déterminer $\overline{\mathrm{A}}$, $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ et $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$.
2. Calculer leurs probabilités.

$$\overline{\mathrm{A}} = \{1 ; 3 ; 5\}, \qquad \mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{6\}, \qquad \mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \{2 ; 3 ; 4 ; 6\}.$$

$$\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}) = \frac{1}{2}, \qquad \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{1}{6}, \qquad \mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

I.3 Version vulgarisée de la loi des grands nombres

Définition 9

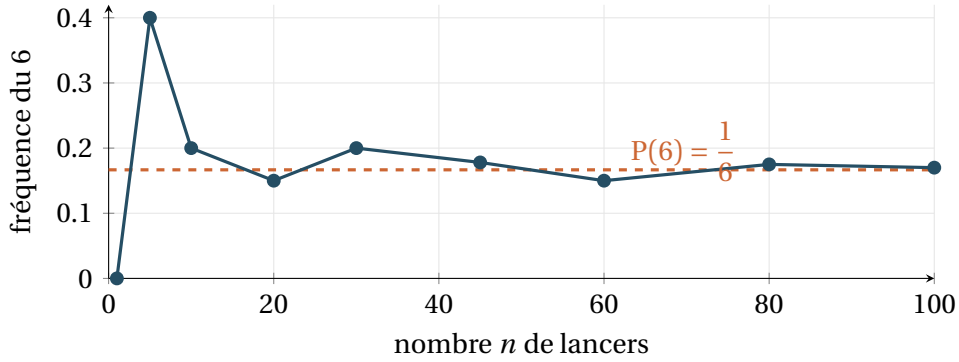
Après n répétitions d'une expérience, si un évènement A est observé k fois, sa **fréquence observée** est

$$f_n(\mathrm{A}) = \frac{k}{n}.$$

Théorème 10 : Version vulgarisée

On répète une même expérience de manière indépendante.

Lorsque n est grand, sauf exception, la fréquence observée est proche de la probabilité.



Remarque I.2. La fréquence fluctue et dépend de la simulation. Une longue série compatible avec un modèle ne démontre pas que ce modèle est vrai; elle permet de l'évaluer ou d'estimer des probabilités inconnues.

II Tableaux croisés

II.1 D'une population aux évènements

Exemple 11 : Commandes et livraison express

On choisit au hasard une commande parmi 200. On note :

- A : « la commande provient d'un compte abonné »;
- E : « la livraison est express ».

	E	$\overline{\text{E}}$	**Total**
A	60	20	80
$\overline{\text{A}}$	30	90	120
Total	90	110	200

Les marges du tableau donnent les probabilités d'un seul évènement :

$$\text{P(A)} = \frac{80}{200} = 0{,}40, \qquad \text{P(E)} = \frac{90}{200} = 0{,}45.$$

Une case intérieure décrit une intersection :

$$\text{P(A} \cap \text{E)} = \frac{60}{200} = 0{,}30.$$

Méthode 12 : Lire un tableau croisé

- Le dénominateur 200 répond à une question portant sur **toute la population**.
- Si l'on sait que la commande appartient à A, l'univers de référence devient la ligne A, d'effectif 80.
- Si l'on sait que la commande appartient à E, l'univers de référence devient la colonne E, d'effectif 90.

III Probabilité conditionnelle

III.1 Changer d'univers de référence

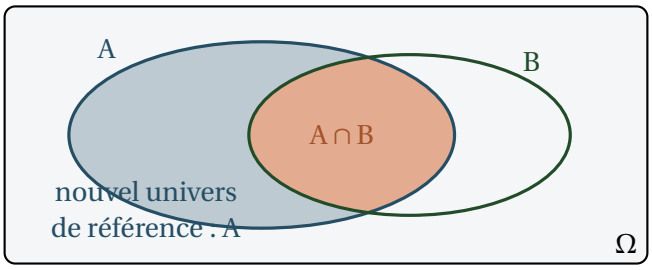
Définition 13

Soient A et B deux évènements tels que $P(A) > 0$. La **probabilité de** B **sachant** A est notée $P_A(B)$ et définie par

$$\boxed{P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}.$$

Dans une population où chaque individu est choisi avec équiprobabilité,

$$\boxed{P_A(B) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(A)}}.$$



Exemple 14 : Reprendre le tableau

Parmi les 80 commandes de comptes abonnés, 60 sont express :

$$P_A(E) = \frac{60}{80} = \frac{3}{4} = 75\,\%.$$

Parmi les 90 commandes express, 60 proviennent de comptes abonnés :

$$P_E(A) = \frac{60}{90} = \frac{2}{3} \approx 66{,}7\,\%.$$

Remarque III.1.

$\boxed{P_A(B) \text{ et } P_B(A) \text{ répondent à deux questions différentes.}}$

L'évènement écrit en indice indique ce que l'on **sait déjà** et fixe le dénominateur.

Exercice 15 : Compléter puis conditionner

Dans une population de 500 objets, 320 vérifient B, 270 ne vérifient pas A, et 45 vérifient A sans vérifier B.

1. Compléter un tableau croisé d'effectifs.
2. Calculer $P_A(B)$ et $P_B(A)$.

	A	$\overline{A}$	**Total**
B	185	135	320
$\overline{B}$	45	135	180
Total	230	270	500

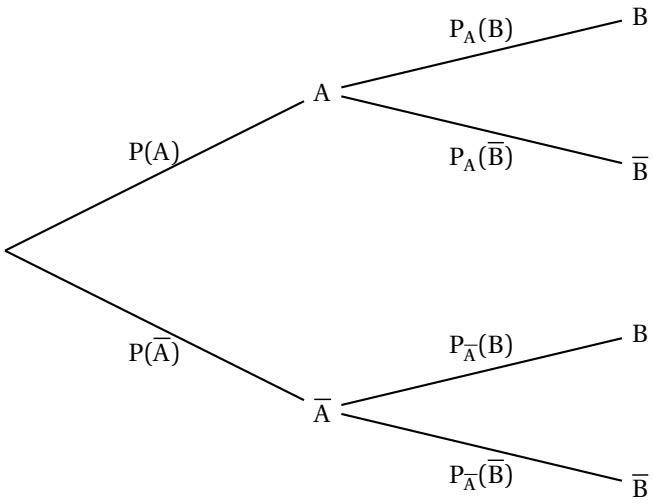
$$P_A(B) = \frac{185}{230} = \frac{37}{46} \approx 0{,}804, \qquad P_B(A) = \frac{185}{320} = \frac{37}{64} \approx 0{,}578.$$

IV Arbres de probabilité

IV.1 Lire les pondérations

Définition 16

Un **arbre pondéré** représente les étapes d'une expérience aléatoire. Les nombres inscrits sur les branches sont des probabilités. Après la branche A, les branches du niveau suivant portent des probabilités **conditionnelles sachant** A.



Propriété 17

- La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud vaut 1 :

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1, \qquad P_A(B) + P_A(\overline{B}) = 1.$$

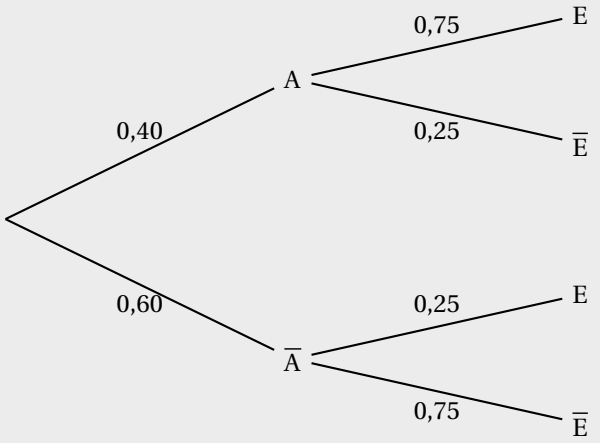
- La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités de ses branches :

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)}.$$

Exemple 18 : Du tableau à l'arbre

Pour les commandes étudiées plus haut,

$$P(A) = 0{,}40, \quad P_A(E) = 0{,}75, \quad P_{\overline{A}}(E) = \frac{30}{120} = 0{,}25.$$



Le chemin A puis E donne

$$P(A \cap E) = 0{,}40 \times 0{,}75 = 0{,}30,$$

ce qui retrouve la case 60/200 du tableau.

Exercice 19 : Compléter un arbre

On sait que $P(A) = 0{,}30$, $P_A(B) = 0{,}60$ et $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}20$.

1. Construire et pondérer l'arbre à deux niveaux.
2. Calculer $P(A \cap B)$ et $P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

Les branches complémentaires portent 0,70, 0,40 et 0,80. Ainsi,

$$P(A \cap B) = 0{,}30 \times 0{,}60 = 0{,}18,$$

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}70 \times 0{,}80 = 0{,}56.$$

V Inverser les conditionnements

V.1 Un test diagnostique fictif

Exemple 20 : Pourquoi le sens de « sachant » est décisif

Un test fictif est appliqué à 10 000 personnes. On note D : « la personne est malade » et T^+ : « le test est positif ».

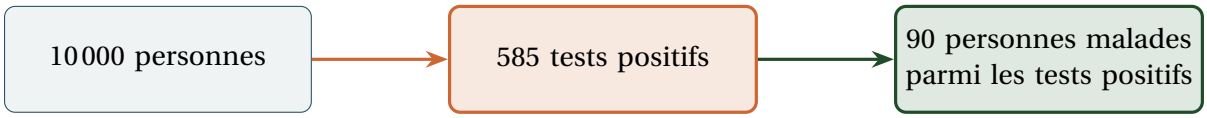
	D	$\overline{D}$	**Total**
T^+	90	495	585
T^-	10	9 405	9 415
Total	100	9 900	10 000

Parmi les personnes malades, 90 sur 100 ont un test positif :

$$P_D(T^+) = \frac{90}{100} = 90\,\%.$$

Mais, parmi les personnes dont le test est positif, 90 sur 585 sont malades :

$$P_{T^+}(D) = \frac{90}{585} \approx 15{,}4\,\%.$$



$$P_{T^+}(D) = \frac{90}{585}$$

le dénominateur est 585

Définition 21 : Vocabulaire des tests

- Un **faux positif** est une personne non malade dont le test est positif : ici, 495 personnes de $T^+ \cap \overline{D}$.
- Un **faux négatif** est une personne malade dont le test est négatif : ici, 10 personnes de $T^- \cap D$.
- La **sensibilité** du test est $P_D(T^+)$.
- La **spécificité** du test est $P_{\overline{D}}(T^-)$, ici $\frac{9\,405}{9\,900} = 95\,\%$.

Méthode 22 : Éviter l'inversion

1. Traduire la phrase : « probabilité de … sachant … ».
2. Placer en indice l'évènement connu : $P_{\text{connu}}(\text{recherché})$.
3. Dans un tableau, entourer la ligne ou la colonne correspondant à l'évènement connu : son total est le dénominateur.

Exercice 23 : Alarme de contrôle qualité

Sur 1 000 appareils, 20 sont défectueux. Une alarme se déclenche pour 18 appareils défectueux et pour 49 appareils non défectueux. On note D : « défectueux » et A : « l'alarme se déclenche ».

1. Calculer $P_D(A)$.
2. Calculer $P_A(D)$.
3. Interpréter la différence.

$$P_D(A) = \frac{18}{20} = 90\,\%.$$

L'alarme se déclenche pour $18 + 49 = 67$ appareils, donc

$$P_A(D) = \frac{18}{67} \approx 26{,}9\,\%.$$

La première probabilité mesure la détection des appareils défectueux ; la seconde mesure la proportion d'appareils réellement défectueux parmi ceux qui déclenchent l'alarme.

À retenir

- Une loi de probabilité est un modèle ; l'équiprobabilité est une hypothèse à expliciter.
- Lors de répétitions indépendantes d'une même expérience, lorsque n est grand, sauf exception, une fréquence observée est proche de la probabilité.
- $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$: l'indice A est le nouvel univers de référence.
- Sur un arbre, les branches issues d'un nœud totalisent 1 et les probabilités d'un chemin se multiplient.
- En général, $P_A(B) \neq P_B(A)$: toujours identifier ce que l'on sait déjà.

Activité numérique AN2 du carnet partagé. Simuler des répétitions indépendantes et comparer des fréquences pour plusieurs tailles.