

LIMITES DE FONCTIONS

I Limites en l'infini

I.1 Limite infinie

Définition 1 : Limite $+\infty$ en $+\infty$

Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ signifie que tout intervalle $[A; +\infty[$, avec A un nombre réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment grand.

On note :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Remarque I.1. Une définition équivalente avec des symboles mathématiques est :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists m \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathcal{D}_f, \quad x \geq m \Rightarrow f(x) \geq A.$$

Définition 2 : Limite $-\infty$ en $+\infty$

Dire qu'une fonction f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ signifie que tout intervalle $] -\infty; A]$, avec A un nombre réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment grand.

On note :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

Remarque I.2. On définit de façon analogue les limites infinies en $-\infty$.

Propriété 3 : Limites de fonctions de référence

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Démonstration. Démontrons le dernier point.

Soit $A \in \mathbb{R}$. Puisque la suite (e^n) est une suite géométrique de raison $e > 1$, elle diverge vers $+\infty$, donc il existe un rang $n_1 \in \mathbb{N}$ à partir duquel tous les termes de la suite dépassent A . En particulier $e^{n_1} \geq A$.

La fonction exponentielle étant croissante, pour tout $x \geq n_1$, on a :

$$e^x \geq e^{n_1} \geq A.$$

Ainsi, tout intervalle $[A; +\infty[$ contient toutes les valeurs de e^x pour x suffisamment grand. Donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty.$$

□

I.2 Limite finie

Définition 4 : Limite finie en $+\infty$

Dire qu'une fonction f a pour limite le nombre réel ℓ en $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment grand.

On note :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell.$$

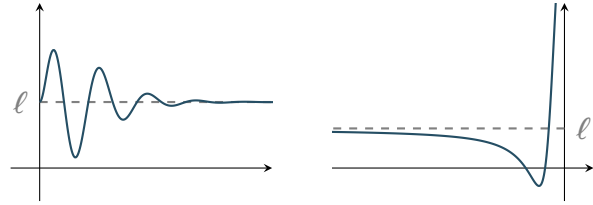
Remarque I.3. On définit de façon analogue une limite réelle en $-\infty$.

Définition 5 : Asymptote horizontale

Lorsque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$, on dit que la droite d'équation $y = \ell$ est une **asymptote horizontale en $+\infty$** à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f .

De même, lorsque $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$, cette droite est une **asymptote horizontale en $-\infty$** à $\mathcal{C}_f$.

Remarque I.4. En notant $M(x; f(x))$ un point de $\mathcal{C}_f$ et $P(x; \ell)$ un point de l'asymptote, la distance MP tend vers 0 lorsque x tend vers l'infini considéré.

**Propriété 6 : Limites nulles de fonctions de référence**

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0.$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0.$$

I.3 Limites et opérations

Remarque I.5. Les tableaux donnés dans le chapitre sur les limites de suites restent valables en adaptant les notations aux fonctions.

Exercice 7

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 - x);$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 5x + 2);$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x-3}.$

1. On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty$. Donc par somme $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 - x) = +\infty$.

2. On lève la forme indéterminée en factorisant : $x^3 - 5x + 2 = x^3 \left(1 - \frac{5}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right).$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{5}{x^2} + \frac{2}{x^3} = 1$, donc par produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 5x + 2 = +\infty$.

3. Pour $x \neq 0$, on a $\frac{2x+1}{x-3} = \frac{2 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{3}{x}}.$

Ainsi $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{x} = 2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{3}{x} = 1$, donc par quotient $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x-3} = 2.$

Propriété 8 : Théorème de composition

Soient a, b et c des nombres réels ou $+\infty$ ou $-\infty$, et f et g deux fonctions.

Si :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \quad \text{et} \quad \lim_{X \rightarrow b} g(X) = c,$$

alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c.$$

Propriété 9 : Limite de l'exponentielle en $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

Démonstration. Pour tout réel x , $e^x = \frac{1}{e^{-x}}$. En posant $X = -x$, on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} X = +\infty$.

Or $\lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$, donc $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^X} = 0$. Ainsi, par composition, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$. □

Exercice 10

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x}$.

Posons $X = -2x$. On a alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} X = -\infty$. Or $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$, donc par composition :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0.$$

I.4 Limites et comparaison

Remarque I.6. Les théorèmes des gendarmes et de comparaison restent valables en adaptant les notations aux fonctions.

Exercice 11

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - \sin(x))$;

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \cos(x)$.

1. Pour tout réel x , $-\sin(x) \geq -1$, donc :

$$x^2 - \sin(x) \geq x^2 - 1.$$

Or $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 1) = +\infty$. Par comparaison, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - \sin(x)) = +\infty$.

2. Pour tout réel x ,

$$-e^{-x} \leq e^{-x} \cos(x) \leq e^{-x}.$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} -e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$. D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \cos(x) = 0$.

Propriété 12 : Croissances comparées

Pour tout entier naturel n :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0.$$

Exercice 13

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^2)$.

Pour tout réel $x \neq 0$,

$$e^x - x^2 = x^2 \left(\frac{e^x}{x^2} - 1 \right).$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ et, par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x^2} - 1 \right) = +\infty$. Donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^2) = +\infty.$$

II Limite en un réel**II.1 Limite infinie****Définition 14 : Limites latérales et asymptote verticale**

Soient a un réel et f une fonction définie au voisinage de a , à droite et à gauche, mais non définie en a .

- On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a par valeurs **supérieures** lorsque tout intervalle $[A; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment proche de a , avec $x > a$.

On note :

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = +\infty.$$

On parle de **limite à droite** en a .

- On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a par valeurs **inférieures** lorsque tout intervalle $[A; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment proche de a , avec $x < a$.

On note :

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = +\infty.$$

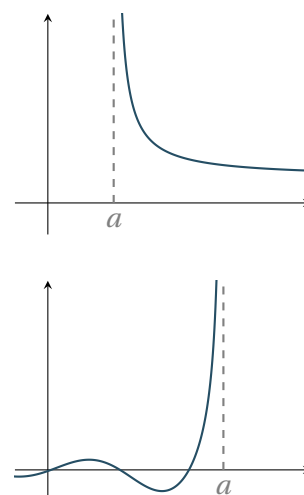
On parle de **limite à gauche** en a .

Dans chacun de ces cas, la droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** à $\mathcal{C}_f$, la courbe représentative de la fonction f .

Si les limites à gauche et à droite sont toutes les deux égales à $+\infty$, alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty.$$

Si les limites à gauche et à droite sont différentes, la fonction n'a pas de limite en a .



Remarque II.1. On définit de façon analogue une limite $-\infty$ en a .

Propriété 15 : Limites de la fonction inverse et de ses puissances

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^n} = +\infty$;
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$

II.2 Limite finie

Définition 16 : Limite finie en un réel

Soient f une fonction définie au voisinage de a et ℓ un réel.

On dit que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a si tout intervalle ouvert centré sur ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment proche de a .

On note :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell.$$

Propriété 17 : Limite obtenue par substitution

Soit f une fonction polynôme, la fonction inverse, la fonction exponentielle, ou une somme, un produit, un quotient ou une composée de ces fonctions.

Si f est définie en a , alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Exercice 18

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 2x - 4)$.

La fonction $x \mapsto e^x - 2x - 4$ est définie en 0. On a donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 2x - 4) = e^0 - 2 \times 0 - 4 = -3.$$

II.3 Limites et opérations

Remarque II.2. Les tableaux donnés dans le chapitre sur les limites de suites restent valables. Le théorème de composition reste également valable en adaptant les notations.

Exercice 19

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{1}{2x - 4};$

2. $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} e^{\frac{1}{x-2}}.$

Lorsque x tend vers 2 avec $x < 2$, $2x - 4$ tend vers 0 par valeurs négatives. Donc :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{1}{2x - 4} = -\infty.$$

Lorsque x tend vers 2 avec $x > 2$, $\frac{1}{x-2} \rightarrow +\infty$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, le théorème de composition donne :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} e^{\frac{1}{x-2}} = +\infty.$$

II.4 Limites et comparaison

| **Remarque II.3.** Les théorèmes des gendarmes et de comparaison restent valables en adaptant les notations.

Exercice 20

Soit f une fonction définie sur $]0; +\infty[$ telle que, pour tout réel $x > 0$,

$$x - 1 \leq f(x) \leq x.$$

Peut-on déterminer la limite de $xf(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures?

Comme $x > 0$, on peut multiplier l'encadrement par x sans changer le sens des inégalités :

$$x^2 - x \leq xf(x) \leq x^2.$$

Or $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x^2 - x) = 0$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^2 = 0$. D'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} xf(x) = 0.$$