

LIMITES DE SUITES

I Limite d'une suite

I.1 Limite infinie

Définition 1 : Limite $+\infty$

On dit qu'une suite (u_n) tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $[A; +\infty[$, avec A un nombre réel, contient toutes les valeurs de u_n à partir d'un certain rang.

On note alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

Remarque I.1. Cela signifie que les termes de la suite finissent par dépasser n'importe quel nombre réel fixé. Avec des symboles mathématiques, on peut écrire :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad u_n \geq A.$$

« Pour tout réel A fixé, il existe un rang N à partir duquel tous les termes de la suite dépassent le seuil A . »

Exemple 2 : Suites de référence de limite $+\infty$

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty.$
- Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^p = +\infty.$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = +\infty.$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n = +\infty.$

Définition 3 : Limite $-\infty$

On dit qu'une suite (u_n) tend vers $-\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $] -\infty; A]$, avec A un nombre réel, contient toutes les valeurs de u_n à partir d'un certain rang.

On note alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty.$$

Exemple 4 : Suites de référence de limite $-\infty$

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} -n = -\infty.$
- Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} -n^p = -\infty.$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\sqrt[n]{n} = -\infty.$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} -e^n = -\infty.$

Théorème 5 : Suites monotones non bornées

1. Une suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.
2. Une suite décroissante non minorée a pour limite $-\infty$.

Démonstration. Démontrons le premier point.

Soit (u_n) une suite croissante non majorée. Soit A un nombre réel quelconque.

Comme la suite (u_n) n'est pas majorée, il existe au moins un entier p tel que :

$$u_p > A.$$

La suite (u_n) est croissante, donc pour tout entier $n \geq p$, on a :

$$u_n \geq u_p > A.$$

Ainsi, à partir du rang p , tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle $[A; +\infty[$.

On a donc bien :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

□

I.2 Limite finie

Définition 6 : Limite finie

Une suite (u_n) a pour limite un nombre réel ℓ lorsque n tend vers $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de u_n à partir d'un certain rang.

On note alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell.$$

On dit que la suite (u_n) **converge vers** ℓ .

Remarque I.2. Une définition équivalente avec des symboles mathématiques est :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

« Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un rang N à partir duquel tous les termes de la suite sont proche de ℓ à ε près. »

Exemple 7 : Suites de référence de limite 0

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$
- Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^p} = 0.$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^n} = 0.$

Propriété 8 : Unicité de la limite

Si une suite converge, alors sa limite est unique.

Théorème 9 : Convergence monotone

1. Si une suite est croissante et majorée, alors cette suite converge.
2. Si une suite est décroissante et minorée, alors cette suite converge.

Remarque I.3. Ce théorème permet de prouver qu'une suite converge, mais ne donne en aucune manière la valeur de sa limite.

Exercice 10

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 4 \end{cases}$$

1. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est majorée par 5.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on définit la propriété :

$$\mathcal{P}_n : "u_n \leq 5".$$

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1 \leq 5$. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ un entier fixé. On suppose que $\mathcal{P}_k$ est vraie, c'est-à-dire que $u_k \leq 5$. Alors :

$$u_{k+1} = \frac{1}{5}u_k + 4 \leq \frac{1}{5} \times 5 + 4 = 5.$$

Donc $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 5$.

2. En déduire que la suite (u_n) est croissante.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5}u_n + 4 - u_n = 4 - \frac{4}{5}u_n = \frac{4}{5}(5 - u_n).$$

Or, d'après la question précédente, $u_n \leq 5$, donc $5 - u_n \geq 0$.

Ainsi $u_{n+1} - u_n \geq 0$, donc la suite (u_n) est croissante.

3. Conclure quant à la convergence de la suite (u_n) .

La suite (u_n) est croissante et majorée par 5. D'après le théorème de convergence monotone, elle converge.

Remarque I.4. Il existe des suites qui n'ont pas de limite. Par exemple, la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ prend alternativement les valeurs 1 et -1 . Elle ne se rapproche donc d'aucun nombre réel et ne tend pas non plus vers $+\infty$ ou $-\infty$.

On dit qu'une suite **diverge** lorsqu'elle ne converge pas (vers une limite finie). En particulier, une suite qui tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ est une suite divergente.

II Opérations sur les limites

Soient (u_n) , (v_n) deux suites numériques définies sur $\mathbb{N}$, et ℓ , ℓ' deux nombres réels.

II.1 Limite d'une somme

Propriété 11 : Somme de deux suites

Les règles suivantes permettent de déterminer la limite d'une somme.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n)$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

Remarque II.1. FI signifie **forme indéterminée**. Dans ce cas, on ne peut pas conclure immédiatement : tous les résultats sont possibles.

Exemple 12

Étudier la limite des suites suivantes.

1. $u_n = -n + 3$.

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-n) = -\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 = 3$. Donc, par somme :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty.$$

2. $v_n = -3 + \frac{1}{n^2}$, pour $n \geq 1$.

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-3) = -3$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$. Donc, par somme :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -3.$$

3. $w_n = n^2 + n - 10$.

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-10) = -10$. Donc, par somme :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = +\infty.$$

II.2 Limite d'un produit

Propriété 13 : Produit de deux suites

Les règles suivantes permettent de déterminer la limite d'un produit.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	ℓ	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	ℓ'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n$	$\ell \ell'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	FI

Remarque II.2. Lorsque le tableau indique $\pm\infty$, on utilise la règle des signes pour savoir.

Exemple 14

Étudier la limite des suites suivantes.

1. $u_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)(-n + 3)$. 2. $v_n = (-2n + 1)\sqrt{n}$. 3. $w_n = 5n^3$.

1. On a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (-n + 3) = -\infty.$$

Donc, par produit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty.$$

2. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-2n + 1) = -\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$.

Le produit d'une suite qui tend vers $-\infty$ par une suite qui tend vers $+\infty$ tend vers $-\infty$. Donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty.$$

3. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5 = 5$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty$. Donc, par produit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = +\infty$.

II.3 Limite d'un quotient

Propriété 15 : Quotient de deux suites

Les règles suivantes permettent de déterminer la limite d'un quotient.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	ℓ	ℓ	$\pm\infty$	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	$\ell' \neq 0$	0^+ ou 0^-	0^+ ou 0^-	$\pm\infty$	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	FI	FI

Remarque II.3. Lorsque le dénominateur tend vers 0, il faut connaître son signe à partir d'un certain rang.

Exemple 16

Étudier la limite des suites suivantes.

1. $u_n = \frac{-2}{n+3}.$

2. $v_n = \frac{e^n}{-1 + \frac{2}{n}},$ pour $n \geq 1.$

1. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-2) = -2$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+3) = +\infty.$ Donc, par quotient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

2. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n = +\infty$ et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-1 + \frac{2}{n} \right) = -1.$$

Donc, par quotient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty.$$

II.4 Formes indéterminées

Méthode 17 : Lever une forme indéterminée

Les formes indéterminées rencontrées dans les tableaux précédents sont de la forme :

$$+\infty - \infty, \quad 0 \times \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}.$$

Dans ces situations, il faut transformer l'expression de la suite avant de conclure.

- Pour une somme contenant une forme indéterminée $+\infty - \infty$, on peut mettre en facteur le terme qui tend le plus rapidement vers l'infini.
- Pour un quotient contenant une forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$ ou $\frac{0}{0}$, on peut factoriser le numérateur et le dénominateur par le terme dominant, puis simplifier.

Exemple 18 : Somme avec forme indéterminée

Étudier la limite de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = n^2 - n + 1.$$

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-n) = -\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1.$

On obtient donc une forme indéterminée $+\infty - \infty.$

On factorise par le terme dominant n^2 :

$$u_n = n^2 \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right).$$

Or :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) = 1.$$

Donc, par produit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

Exemple 19 : Quotient avec forme indéterminée

Étudier la limite de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{2+n}{3+4n}.$$

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2+n) = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (3+4n) = +\infty$.

On obtient donc une forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$.

On factorise par n au numérateur et au dénominateur :

$$u_n = \frac{n\left(\frac{2}{n} + 1\right)}{n\left(\frac{3}{n} + 4\right)} = \frac{\frac{2}{n} + 1}{\frac{3}{n} + 4}.$$

Or :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{n} + 1\right) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{n} + 4\right) = 4.$$

Donc, par quotient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{4}.$$

III Limites et comparaison**III.1 Pour les limites infinies****Théorème 20 : Théorème de comparaison**

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.

1. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.
2. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Démonstration. Démontrons le premier point.

Soit A un nombre réel.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, l'intervalle $[A; +\infty[$ contient toutes les valeurs de u_n à partir d'un certain rang n_0 . Ainsi, pour tout $n \geq n_0$, on a :

$$u_n \geq A.$$

De plus, par hypothèse, il existe un rang n_1 à partir duquel $u_n \leq v_n$.

On pose $N = \max(n_0, n_1)$. Alors, pour tout $n \geq N$,

$$v_n \geq u_n \geq A.$$

Donc l'intervalle $[A; +\infty[$ contient toutes les valeurs de v_n à partir du rang N . Ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty.$$

□

Exemple 21

Étudier la limite de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = n^2 + (-1)^n.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $(-1)^n \geq -1$. Donc :

$$u_n = n^2 + (-1)^n \geq n^2 - 1.$$

Or :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - 1) = +\infty.$$

D'après le théorème de comparaison :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

III.2 Pour les limites finies

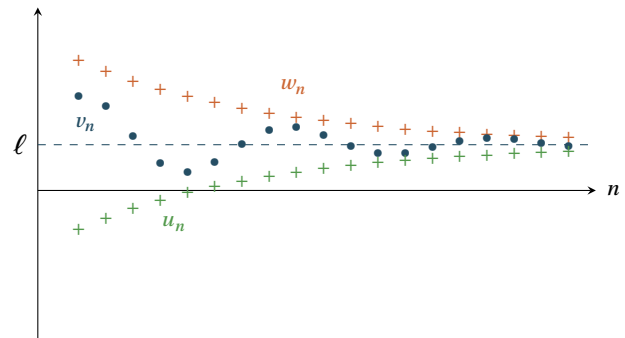
Théorème 22 : Théorème des gendarmes

Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites définies sur $\mathbb{N}$ telles que :

- $u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang ;
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell$, avec ℓ un nombre réel.

Alors la suite (v_n) converge et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell.$$



Exemple 23

Étudier la limite de la suite (v_n) définie, pour tout entier $n \geq 1$, par :

$$v_n = \frac{\cos(n)}{\sqrt{n}}.$$

Pour tout $n \geq 1$, on a :

$$-1 \leq \cos(n) \leq 1.$$

Comme $\sqrt{n} > 0$, on obtient :

$$-\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{\cos(n)}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Or :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{\sqrt{n}} \right) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

D'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0.$$

IV Comportement d'une suite géométrique

Propriété 24 : Inégalité de Bernoulli

Soit a un nombre réel positif.

Pour tout entier naturel n ,

$$(1 + a)^n \geq 1 + na.$$

Démonstration. On démontre cette propriété par récurrence.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on définit :

$$\mathcal{P}_n : "(1+a)^n \geq 1+na".$$

Initialisation : Pour $n = 0$, on a :

$$(1+a)^0 = 1 \quad \text{et} \quad 1+0a = 1.$$

Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ un entier fixé. On suppose que $\mathcal{P}_k$ est vraie, c'est-à-dire :

$$(1+a)^k \geq 1+ka.$$

Comme $a \geq 0$, on a $1+a > 0$. On peut donc multiplier l'inégalité par $1+a$:

$$(1+a)^{k+1} \geq (1+ka)(1+a) = 1+(k+1)a+ka^2.$$

Or $ka^2 \geq 0$, donc :

$$(1+a)^{k+1} \geq 1+(k+1)a.$$

Donc $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(1+a)^n \geq 1+na.$$

□

Propriété 25 : Limite de q^n

Soit q un nombre réel.

Condition sur q	Comportement de la suite (q^n)
$q > 1$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$
$q = 1$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$
$-1 < q < 1$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$
$q \leq -1$	La suite (q^n) n'a pas de limite

Démonstration. Démontrons le cas où $q > 1$.

Puisque $q > 1$, il existe un nombre réel $a > 0$ tel que :

$$q = 1+a.$$

Ainsi :

$$q^n = (1+a)^n.$$

D'après l'inégalité de Bernoulli :

$$q^n = (1+a)^n \geq 1+na.$$

Or $a > 0$, donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} na = +\infty \quad \text{et donc} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (1+na) = +\infty.$$

D'après le théorème de comparaison :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty.$$

□

Exemple 26

1. Étudier la limite de la suite géométrique (u_n) de raison 4 et de premier terme $u_0 = -7$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n = -7 \times 4^n.$$

Comme $4 > 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4^n = +\infty$.

Donc, par produit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty.$$

2. Étudier la limite de la suite géométrique (v_n) de raison $-\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_1 = 5$.

Pour tout $n \geq 1$, on a :

$$v_n = 5 \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}.$$

Comme $-1 < -\frac{1}{3} < 1$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 0.$$

Donc, par produit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0.$$