

RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE

I Raisonement par récurrence

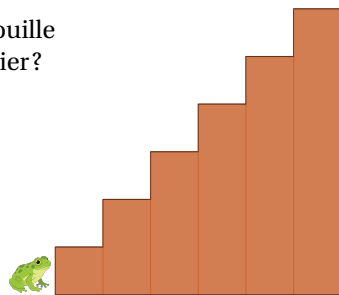
Axiome 1 : Axiome de récurrence

$\mathcal{P}_n$ est une propriété qui dépend d'un entier naturel n , et n_0 désigne un entier naturel.
Si la propriété $\mathcal{P}_n$ vérifie les deux conditions suivantes :

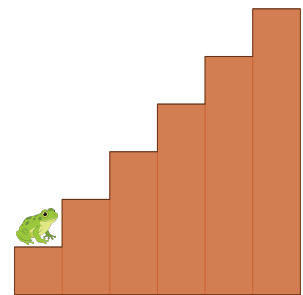
1. **Initialisation** : $\mathcal{P}_{n_0}$ est vraie.
2. **Hérédité** : si $\mathcal{P}_k$ est vraie pour un entier naturel $k \geq n_0$, alors $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

Alors, pour tout nombre entier naturel $n \geq n_0$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

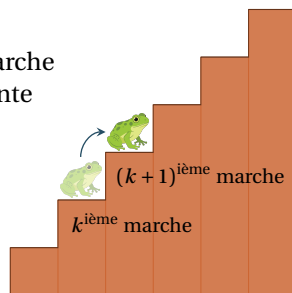
Est-ce que cette grenouille
peut monter cet escalier ?



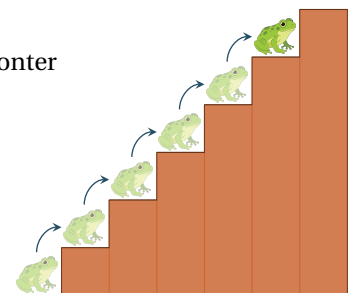
Initialisation :
Elle peut monter sur la
première marche



Hérédité :
Lorsqu'elle est sur une marche
elle peut passer à la suivante



Conclusion :
La grenouille peut monter
cet escalier



Remarque I.1. En Terminale, on a généralement $n_0 = 0$ ou $n_0 = 1$.

Méthode 2 : Rédiger une récurrence

- Soit $n \geq n_0$, on pose $\mathcal{P}_n$: "votre propriété préférée dépendant de n ".
- **Initialisation** : On montre que $\mathcal{P}_{n_0}$ est vraie.
- **Hérédité** : Soit $k \geq n_0$ un entier **fixé**.

On suppose que la propriété $\mathcal{P}_k$ est vraie (**Hypothèse de Récurrence**).

On montre alors que la propriété $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

On part souvent de l'hypothèse de récurrence (HR) et on montre que la propriété est héréditaire grâce à des implications successives.

- **Conclusion** : D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Remarque I.2. Le choix d'écrire k plutôt que n dans l'étape d'hérédité est arbitraire.

Il s'agit uniquement d'une **notation**, on dit que **l'indice est muet**.

On pourrait changer de notation et utiliser n, m, l, p , 🍌 ou encore 🚀 ...

Par exemple, on pourrait écrire :

- **Hérédité** : Soit 🌸 $\geq n_0$ un entier **fixé**.

On suppose que la propriété $\mathcal{P}_{\text{🌸}}$ est vraie (**Hypothèse de Récurrence**).

On montre alors que la propriété $\mathcal{P}_{\text{🌸}+1}$ est vraie.

Mais ne le faites pas 😊.

Exercice 1. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$$

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = 2^n - 1.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on définit la propriété $\mathcal{P}_n$: " $u_n = 2^n - 1$ ".

Initialisation : Pour $n = 0$.

On a $u_0 = 0$ et $2^0 - 1 = 1 - 1 = 0$. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ un rang fixé. On suppose que $\mathcal{P}_k$ est vraie (Hypothèse de Récurrence). On a alors :

$$u_{k+1} = 2u_k + 1 = 2(2^k - 1) + 1 = 2^{k+1} - 2 + 1 = 2^{k+1} - 1.$$

Donc $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

Conclusion :

Par le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

II Comportement global d'une suite

II.1 Suites monotones

Définition 3 : Rappels

On dit qu'une suite (u_n) est :

- **croissante** si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$.
- **décroissante** si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$.

On dit qu'une suite est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

Exercice 2. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \end{cases}$$

1. À l'aide de la calculatrice, conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) .
2. Démontrer cette conjecture par récurrence.

1. On conjecture que la suite (u_n) est décroissante.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, on définit la propriété $\mathcal{P}_n : "u_{n+1} \leq u_n"$.

Initialisation : Pour $n = 0$.

On a $u_0 = 10$ et $u_1 = \frac{1}{2}u_0 + 1 = \frac{1}{2} \times 10 + 1 = 6$. Donc $u_1 \leq u_0$ et ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ un rang fixé. On suppose que $\mathcal{P}_k$ est vraie (Hypothèse de Récurrence). On a alors :

$$u_{k+1} \leq u_k.$$

En multipliant par $\frac{1}{2} > 0$, puis en ajoutant 1, on obtient :

$$\frac{1}{2}u_{k+1} + 1 \leq \frac{1}{2}u_k + 1.$$

Donc $u_{k+2} \leq u_{k+1}$, c'est-à-dire $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

Conclusion :

D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc la suite (u_n) est décroissante.

II.2 Suites majorées, minorées et bornées

Définition 4 : Rappels

Une suite (u_n) est :

- **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$.
On dit que M est un **majorant** de la suite (u_n) .
- **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$.
On dit que m est un **minorant** de la suite (u_n) .
- **bornée** si (u_n) est majorée et minorée.

Exemple 5

- La suite de terme général $u_n = (-1)^n$ est majorée par 1 et minorée par -1, donc elle est bornée.
- La suite de terme général $v_n = n$ est minorée par 0, mais elle n'est pas majorée.

Exercice 3. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3 \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n \leq 4.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on définit la propriété $\mathcal{P}_n : "u_n \leq 4"$.

Initialisation : Pour $n = 0$.

On sait que $u_0 = 1$, donc $u_0 \leq 4$ et $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ un rang fixé. On suppose que $\mathcal{P}_k$ est vrai (Hypothèse de Récurrence), c'est-à-dire :

$$u_k \leq 4.$$

En multipliant par $\frac{1}{4} > 0$, puis en ajoutant 3, on obtient :

$$\frac{1}{4}u_k + 3 \leq 4.$$

On a donc $u_{k+1} \leq 4$ et ainsi $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

Conclusion :

D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

III Sommes

Propriété 6 : Somme des premiers entiers

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la propriété $\mathcal{P}_n$: " $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ ".

Initialisation : Pour $n = 1$, on a $\sum_{k=1}^1 k = 1$ et $\frac{1(1+1)}{2} = 1$. Donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$ un rang fixé. On suppose que $\mathcal{P}_k$ est vraie (Hypothèse de Récurrence), c'est-à-dire :

$$\sum_{i=1}^k i = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Alors :

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \sum_{i=1}^k i + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = (k+1) \left(\frac{k}{2} + 1 \right) = (k+1) \frac{k+2}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Ainsi $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

Conclusion :

D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie. □

Propriété 7 : Somme des termes d'une suite géométrique

Si $q \neq 1$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$1 + q + \cdots + q^n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$, on définit la propriété $\mathcal{P}_n$: " $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ ".

Initialisation : Pour $n = 0$, on a : $\sum_{k=0}^0 q^k = 1 = \frac{1 - q^1}{1 - q}$. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ un rang fixé. On suppose que $\mathcal{P}_k$ est vraie (Hypothèse de Récurrence), c'est-à-dire :

$$\sum_{i=0}^k q^i = \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q}.$$

On a alors :

$$\sum_{i=0}^{k+1} q^i = \sum_{i=0}^k q^i + q^{k+1} = \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q} + q^{k+1} = \frac{1 - q^{k+1} + q^{k+1}(1 - q)}{1 - q} = \frac{1 - q^{k+2}}{1 - q}.$$

Ainsi $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

Conclusion :

D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie. □