

VECTEURS, DROITES ET PLANS DE L'ESPACE

I Vecteurs de l'espace

I.1 Définitions et rappels

On étend à l'espace la notion de vecteur étudiée dans le plan. Un vecteur (non nul) est défini par une **direction**, un **sens** et une **norme**.

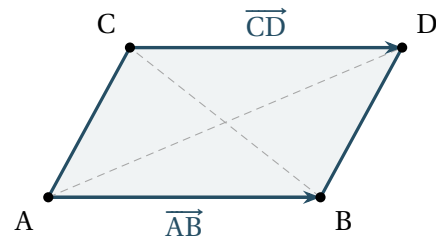
Pour deux points A et B de l'espace, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur de la translation qui transforme A en B.

On retrouve dans l'espace les mêmes opérations et les mêmes propriétés que dans le plan : addition, multiplication par un réel, relation de Chasles, règle du parallélogramme, colinéarité et produit scalaire.

Propriété 1 : Translation et parallélogramme

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

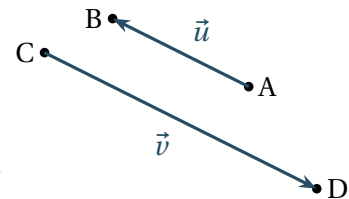
1. D est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$;
2. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$;
3. ABDC est un parallélogramme;
4. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$. (Règle du parallélogramme)



Propriété 2 : Vecteurs colinéaires

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires;
2. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même direction;
3. il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$;
4. si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$, alors les droites (AB) et (CD) sont parallèles.



I.2 Combinaisons linéaires de vecteurs

Définition 3 : Combinaison linéaire

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace, et λ et μ deux nombres réels.

Le vecteur $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ est appelé une **combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

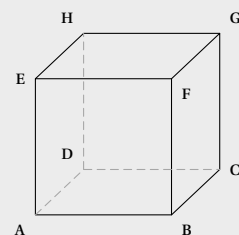
Remarque I.1. On peut considérer une combinaison linéaire de plus de deux vecteurs.

Exercice 4

On considère le cube ABCDEFGH représenté ci-dessous.

Construire les points P, Q, R et S tels que :

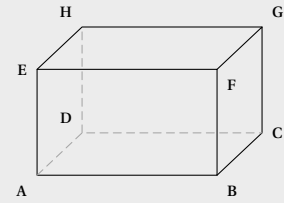
1. $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CG}$;
2. $\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{HD}$;
3. $\overrightarrow{BR} = \overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$;
4. $\overrightarrow{HS} = \overrightarrow{DB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$.



Exercice 5

On considère le parallélépipède rectangle ABCDEFGH ci-contre.

Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{FC}$ comme combinaisons linéaires des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{BC}$.



D'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AE}.$$

De plus, $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AE}$ et :

$$\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC}.$$

II Caractérisation d'ensembles de points de l'espace**II.1 Droites de l'espace****Définition 6 : Droite définie par un point et un vecteur directeur**

Soient A un point de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur non nul.

L'ensemble des points M de l'espace tels que :

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

est une **droite**.

Le couple $(A; \vec{u})$ est un **repère** de cette droite et $\vec{u}$ est un **vecteur directeur** de la droite.

Remarque II.1. Une droite de l'espace est caractérisée par la donnée d'un point et d'un vecteur non nul.

Propriété 7 : Appartenance à une droite

Un point M appartient à la droite (AB) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

II.2 Plans de l'espace**Définition 8 : Plan défini par un point et deux vecteurs directeurs**

Soient A un point de l'espace et $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires.

L'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

est un **plan de l'espace**.

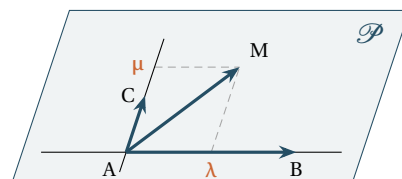
Le triplet $(A; \vec{u}, \vec{v})$ est un **repère du plan**. On dit que ce plan est dirigé par la **base** $(\vec{u}, \vec{v})$.

Remarque II.2. Un plan est caractérisé par la donnée d'un point et de deux vecteurs non colinéaires.

Propriété 9 : Appartenance à un plan

Soient A, B et C trois points non alignés de l'espace, et $\mathcal{P}$ le plan (ABC). Un point M appartient au plan $\mathcal{P}$ si et seulement s'il existe deux nombres réels λ et μ tels que :

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}.$$



III Positions relatives de droites et de plans

III.1 Vecteurs coplanaires

Définition 10 : Points et vecteurs coplanaires

1. Quatre points A, B, C et D sont **coplanaires** lorsqu'ils appartiennent à un même plan.
2. On considère quatre points O, A, B et C et on pose :

$$\vec{u} = \overrightarrow{OA}, \quad \vec{v} = \overrightarrow{OB}, \quad \vec{w} = \overrightarrow{OC}.$$

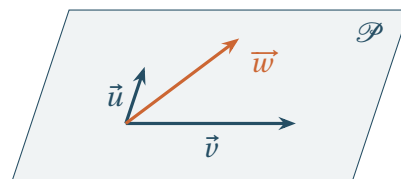
Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont dits **coplanaires** lorsque les points O, A, B et C sont coplanaires.

Propriété 11 : Caractérisation des vecteurs coplanaires

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne soient pas colinéaires.

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement s'il existe deux nombres réels λ et μ tels que :

$$\vec{w} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}.$$



Exercice 12

1. Dans le cube ABCDEFGH, les vecteurs $\overrightarrow{EH}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont-ils coplanaires?

On a $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AD}$ et les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires.

Supposons que les vecteurs $\overrightarrow{EH}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AG}$ soient coplanaires. D'après la caractérisation des vecteurs coplanaires, il existerait deux réels λ et μ tels que

$$\overrightarrow{AG} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AD}.$$

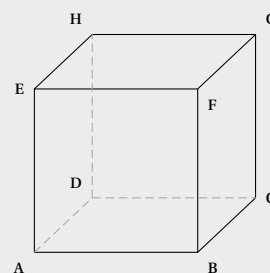
Le point G appartiendrait alors au plan (ABD), c'est-à-dire au plan (ABCD), ce qui est faux. Les vecteurs $\overrightarrow{EH}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AG}$ ne sont donc pas coplanaires.

2. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

Dans le cube, $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AD}$. Ainsi :

$$\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}.$$

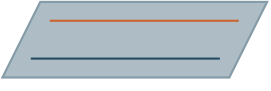
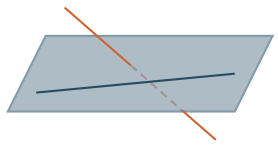
Le vecteur $\overrightarrow{EG}$ est donc une combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$: ces trois vecteurs sont coplanaires.



III.2 Positions relatives de deux droites

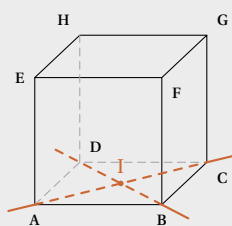
Dans l'espace, deux droites peuvent être **coplanaires** ou **non coplanaires**.

Lorsqu'elles sont coplanaires, elles appartiennent à un même plan : elles peuvent alors être **sécantes** ou **parallèles**. Deux droites parallèles peuvent être strictement parallèles ou confondues.

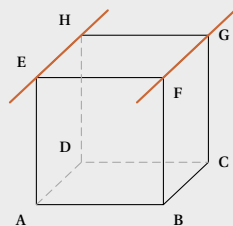
Droites coplanaires		Droites non coplanaires
		
Droites parallèles	Droites sécantes	Non parallèles et non sécantes

Exercice 13

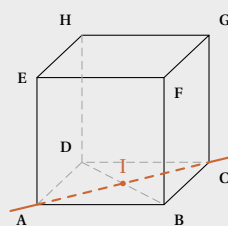
Dans chacune des situations suivantes, donner la position relative des droites indiquées.



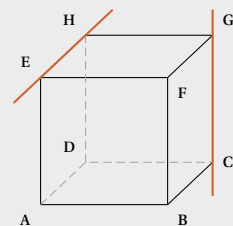
(AC) et (DB) sont
sécantes en I



(EH) et (FG) sont
strictement parallèles



(AI) et (AC) sont
confondues



(EH) et (GC) sont
non coplanaires

Méthode 14 : Étudier la position relative de deux droites

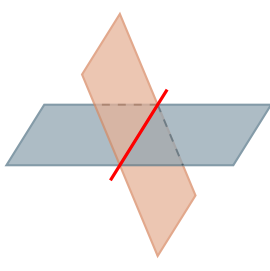
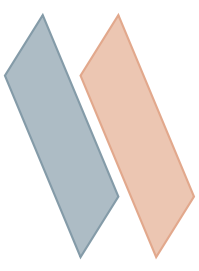
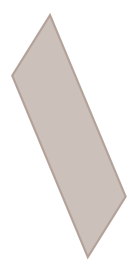
On considère deux droites $d_1(A_1; \vec{u}_1)$ et $d_2(A_2; \vec{u}_2)$.

- Si $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont colinéaires :
 - si les droites ont un point commun, elles sont confondues;
 - sinon, elles sont strictement parallèles.
- Si $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ ne sont pas colinéaires :
 - si les droites ont un point commun, elles sont sécantes et coplanaires;
 - sinon, elles sont non coplanaires.

Remarque III.1. Cette étude sera plus facile à mener dans la suite du cours à l'aide des représentations paramétriques.

III.3 Positions relatives de deux plans

Deux plans de l'espace sont soit **sécants**, soit **parallèles**. Lorsqu'ils sont parallèles, ils peuvent être strictement parallèles ou confondus. Lorsqu'ils sont sécants, leur intersection est une **droite**.

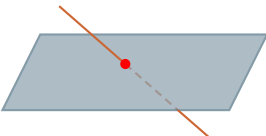
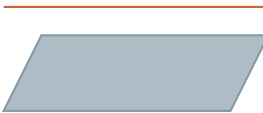
Plans sécants	Plans parallèles	
		
intersection : droite	Strictement parallèles	Confondus

Méthode 15 : Démontrer que deux plans sont parallèles

Pour démontrer que deux plans sont parallèles, il suffit de montrer que deux vecteurs non colinéaires de l'un des plans sont respectivement colinéaires à deux vecteurs non colinéaires de l'autre plan.

III.4 Positions relatives d'une droite et d'un plan

Une droite d et un plan $\mathcal{P}$ de l'espace sont soit **sécants**, soit **parallèles**. Lorsqu'ils sont parallèles, la droite peut être strictement parallèle au plan ou incluse dans celui-ci. Lorsqu'ils sont sécants, leur intersection est un **point**.

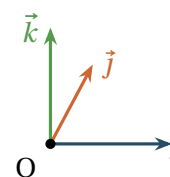
d et $\mathcal{P}$ sécants	d et $\mathcal{P}$ parallèles	
		
intersection : point	Strictement parallèles	d incluse dans $\mathcal{P}$

IV Bases et repères de l'espace

IV.1 Définitions

Définition 16 : Base et repère de l'espace

- On appelle **base de l'espace** tout triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ formé de trois vecteurs non coplanaires.
- On appelle **repère de l'espace** tout quadruplet $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, où O est un point de l'espace et $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de l'espace.



Propriété 17 : Coordonnées dans l'espace

- Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de l'espace. Pour tout vecteur $\vec{u}$, il **existe** un **unique** triplet de réels $(x; y; z)$ tel que :

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Le triplet $(x; y; z)$ représente les **coordonnées** du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- Dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet de réels $(x; y; z)$ tel que :

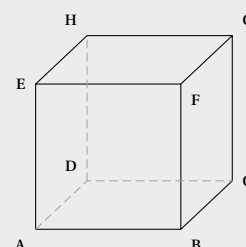
$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Le triplet $(x; y; z)$ représente les **coordonnées** de M dans ce repère.

Exercice 18

Dans le cube ABCDEFGH :

- $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE})$ forme-t-il un repère de l'espace ?
- Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BH}$ dans ce repère.
- Déterminer les coordonnées du point G dans ce repère.



1. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ appartiennent au plan (ABCD) tandis que $\overrightarrow{AE}$ n'appartient pas à ce plan. Ils ne sont donc pas coplanaires : le quadruplet forme bien un repère de l'espace.
2. On a $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$. Ainsi

$$\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AH} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}.$$

Les coordonnées de $\overrightarrow{BH}$ sont donc $(-2; 1; 1)$.

3. $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$, donc G(0; 1; 1) dans ce repère.

Propriété 19 : Coordonnées d'un vecteur et d'un milieu

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$.

1. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$.
2. Les coordonnées du milieu I de [AB] sont $I \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2} \right)$.

Exercice 20

On considère les points $A(1; -1; 2)$ et $B(3; 1; -4)$.

Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$, puis celles du milieu I de [AB].

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 - 1 \\ 1 - (-1) \\ -4 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Le milieu I a pour coordonnées :

$$I \left(\frac{1+3}{2}; \frac{-1+1}{2}; \frac{2-4}{2} \right) = (2; 0; -1).$$

IV.2 Représentation paramétrique d'une droite

Dans toute cette partie, l'espace est rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Propriété 21 : Caractérisation paramétrique d'une droite

Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ un point d'une droite Δ de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Un point $M(x; y; z)$ appartient à Δ si et seulement s'il existe un réel t tel que :

$$\begin{cases} x = x_A + at, \\ y = y_A + bt, \\ z = z_A + ct. \end{cases}$$

Définition 22 : Représentation paramétrique d'une droite

Le système d'équations :

$$\begin{cases} x = x_A + at, \\ y = y_A + bt, \\ z = z_A + ct, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

est une **représentation paramétrique** de la droite Δ passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et dirigée par $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Remarque IV.1. Une droite admet une **infinité** de représentations paramétriques : on peut choisir n'importe quel point de la droite et n'importe lequel de ses vecteurs directeurs.

Exercice 23

- Donner une représentation paramétrique de la droite (AB) où $A(1; -3; 1)$ et $B(-1; 1; 4)$.
- Soit la droite d définie par :

$$d: \begin{cases} x = -1 + 2u, \\ y = 3u, \\ z = 5 - u, \end{cases} \quad u \in \mathbb{R}.$$

- Décrire la droite d .
- Les points $K(1; 3; 4)$ et $L(3; 6; 2)$ appartiennent-ils à d ?

- $\overrightarrow{AB} = (-2; 4; 3)$. Une représentation paramétrique de (AB) est donc

$$\begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = -3 + 4t, \\ z = 1 + 3t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

- La droite d passe par $(-1; 0; 5)$ et admet $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ pour vecteur directeur.
 - Pour K, les deux premières équations donnent $u = 1$, et la troisième est alors vérifiée : $K \in d$.
Pour L, les deux premières équations donnent $u = 2$, mais la troisième donnerait $z = 3 \neq 2$: $L \notin d$.

Exercice 24

On considère les points $A(0; 0; 1)$ et $B(1; 2; 8)$ ainsi que la droite d donnée par

$$d: \begin{cases} x = -2 + 6k, \\ y = 1 - k, \\ z = -3 + 16k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}.$$

Étudier la position relative des droites (AB) et d .

Le vecteur $\overrightarrow{AB} = (1; 2; 7)$ est un vecteur directeur de (AB), tandis que $\vec{v} = (6; -1; 16)$ est un vecteur directeur de d . Ils ne sont pas colinéaires.

Une représentation paramétrique de (AB) est :

$$\begin{cases} x = t, \\ y = 2t, \\ z = 1 + 7t. \end{cases}$$

Cherchons un éventuel point commun :

$$\begin{cases} t = -2 + 6k, \\ 2t = 1 - k, \\ 1 + 7t = -3 + 16k. \end{cases}$$

Les deux premières équations donnent $k = \frac{5}{13}$ et $t = \frac{4}{13}$. Vérifions la troisième équation :

$$1 + 7 \times \frac{4}{13} = \frac{41}{13} \quad \text{et} \quad -3 + 16 \times \frac{5}{13} = \frac{41}{13}.$$

Ces valeurs vérifient donc les trois équations. Les droites (AB) et d sont sécantes au point :

$$I\left(\frac{4}{13}; \frac{8}{13}; \frac{41}{13}\right).$$