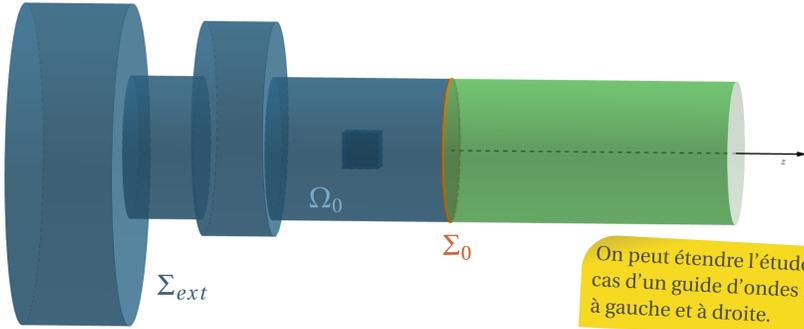


Problème étudié

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ guide d'ondes semi-infini dans la direction de propagation z .
 $\Omega \cap \{z < 0\}$ borné, $\Omega \cap \{z > 0\} = \Theta \times]0; +\infty[$, avec Θ domaine connexe borné.



On peut étendre l'étude au cas d'un guide d'ondes infini à gauche et à droite.

Problème de Maxwell en régime harmonique en temps, avec conditions aux limites de type conducteur parfait :

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H} & \text{div}(\varepsilon\mathbf{E}) = 0 \\ \text{rot } \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon\mathbf{E} + \mathbf{J} & \text{div}(\mu\mathbf{H}) = 0 \end{cases} \text{ dans } \Omega, \quad \begin{cases} \mathbf{v} \times \mathbf{E} = 0 \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{H} = 0 \end{cases} \text{ sur } \partial\Omega. \quad (1)$$

Hypothèses :

- $\varepsilon, \mu \geq C > 0$, $\text{supp } \mathbf{J} \subset \Omega_0$, $\mathbf{J} \in \mathbb{L}^2(\Omega_0)$ et $\text{div } \mathbf{J} = 0$.
- Homogénéité : ε et μ constants pour $z \geq 0$ (on supposera $\varepsilon \equiv \mu \equiv 1$).

Objectif :

- Approximation de la solution sortante par éléments finis.

Difficultés :

- Solution non décroissante à l'infini.
- Équations de Maxwell 3D.

Méthode :

- Réduction du problème à un domaine borné.
- Construction d'une condition transparente pour éviter les réflexions parasites.

Analyse du Problème

Analyse du problème exact :

En travaillant avec $(\Phi_{n,TE}, \beta_{n,TE})_n, (\Phi_{n,TM}, \beta_{n,TM})_n$ liées aux modes Transverses Électriques et Magnétiques du guide, on a la décomposition modale pour $z \geq 0$:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{E} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \Phi_{n,TE} + b_n \Phi_{n,TM}^\perp \quad \text{et} \quad \mathbf{v} \times \mathbf{H} = \sum_{n=1}^{+\infty} -a_n \frac{\beta_n^{TE}}{\omega} \Phi_{n,TE}^\perp + b_n \frac{\omega}{\beta_n^{TM}} \Phi_{n,TM}$$

où a_n et b_n ne dépendent que de $\mathbf{v} \times \mathbf{E}|_{\Sigma_0}$.

Opérateur EtM (Electric-to-Magnetic) :

$$\mathbf{G} : \mathbf{v} \times \mathbf{E}|_{\Sigma_0} \mapsto \mathbf{v} \times \mathbf{H}|_{\Sigma_0}.$$

Le champ \mathbf{E} appartient à $\mathbb{H} := \{\Phi \in \mathbb{L}^2(\Omega_0) \mid \text{rot } \Phi \in \mathbb{L}^2(\Omega_0), \mathbf{v} \times \Phi = 0 \text{ sur } \Sigma_{ext}\}$.

Le problème (1) est équivalent à :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{E} \in \mathbb{H}, \text{ tel que :} \\ \forall \Phi \in \mathbb{H}, \quad a(\mathbf{E}, \Phi) = i\omega \int_{\Omega_0} \mathbf{J} \cdot \bar{\Phi}, \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{où } a(\mathbf{E}, \Phi) = \int_{\Omega_0} \mu^{-1} \text{rot } \mathbf{E} \cdot \text{rot } \bar{\Phi} - \omega^2 \int_{\Omega_0} \varepsilon \mathbf{E} \cdot \bar{\Phi} + i\omega \langle \mathbf{G}(\mathbf{v} \times \mathbf{E}) \mid \bar{\Phi} \rangle_{\Sigma_0}.$$

Les modes propres du guide forment une base hilbertienne de $\mathbb{L}^2(\Sigma_0)$.

Théorème 1. (Problème EtM exact)

Si ω^2 n'est pas valeur propre de (1), alors il existe une unique solution au problème (2) dépendant continuellement du terme source \mathbf{J} .



Idee clé de la preuve : raisonner dans l'espace

Si $\Psi \in \mathbb{X}$, alors $\text{div } \Psi = 0$, $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathbb{L}^2$ est compacte.

$$\mathbb{X} := \left\{ \Psi \in \mathbb{H} \mid \forall \varphi \in H^1(\Omega_0), \omega^2 \int_{\Omega_0} \varepsilon \Psi \cdot \nabla \varphi - i\omega \langle \mathbf{G}(\mathbf{v} \times \Psi) \mid \nabla_T \varphi \rangle_{\Sigma_0} = 0 \right\}.$$

Analyse du problème numérique :

⚠ Obligation de tronquer la série de l'EtM pour le numérique. Soit $N \geq 1$:

$$\mathbf{G}_N : \mathbf{v} \times \mathbf{E}|_{\Sigma_L} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \Phi_{n,TE} + b_n \Phi_{n,TM}^\perp \mapsto \sum_{n=1}^N -a_n \frac{\beta_n^{TE}}{\omega} \Phi_{n,TE}^\perp + b_n \frac{\omega}{\beta_n^{TM}} \Phi_{n,TM}.$$

Problème EtM tronqué :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{E}_N \in \mathbb{H}_L, \text{ tel que :} \\ \forall \Phi \in \mathbb{H}_L, \quad a_N(\mathbf{E}_N, \Phi) = i\omega \int_{\Omega_L} \mathbf{J} \cdot \bar{\Phi}, \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{où } a_N(\mathbf{E}_N, \Phi) = \int_{\Omega_L} \mu^{-1} \text{rot } \mathbf{E}_N \cdot \text{rot } \bar{\Phi} - \omega^2 \int_{\Omega_L} \varepsilon \mathbf{E}_N \cdot \bar{\Phi} + i\omega \langle \mathbf{G}_N(\mathbf{v} \times \mathbf{E}_N) \mid \bar{\Phi} \rangle_{\Sigma_L}.$$

Théorème 2. (Problème EtM tronqué)

Pour $L > 0$, pour N suffisamment grand, si ω^2 n'est pas valeur propre de (1), alors il existe une unique solution à (3) dépendant continuellement du terme source \mathbf{J} .

De plus, si \mathbf{E} est la solution de (2) et \mathbf{E}_N celle de (3), alors :

$$\exists C, \alpha > 0, \quad \|\mathbf{E} - \mathbf{E}_N\|_{\mathbb{H}} \leq C e^{-\alpha LN} \|\mathbf{J}\|_{\mathbb{L}^2}.$$

Résultats numériques

Éléments finis : première famille de Nédélec d'ordre 2.

réalisés avec :

Validation numérique dans un guide de référence :

Choix d'une géométrie dans laquelle on connaît une solution explicite.

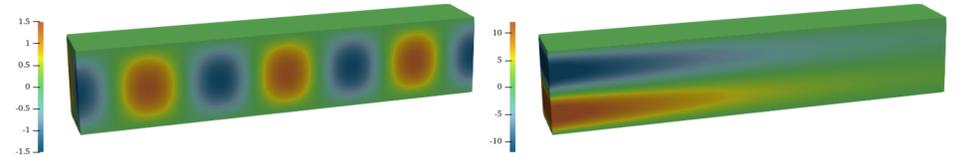


FIG. 1. Partie réelle de la composante E_y du champ électrique totale. À gauche le 3^e mode TE (propagatif), à droite le 4^e (évanescents).

Comparaison avec la méthode des PMLs :

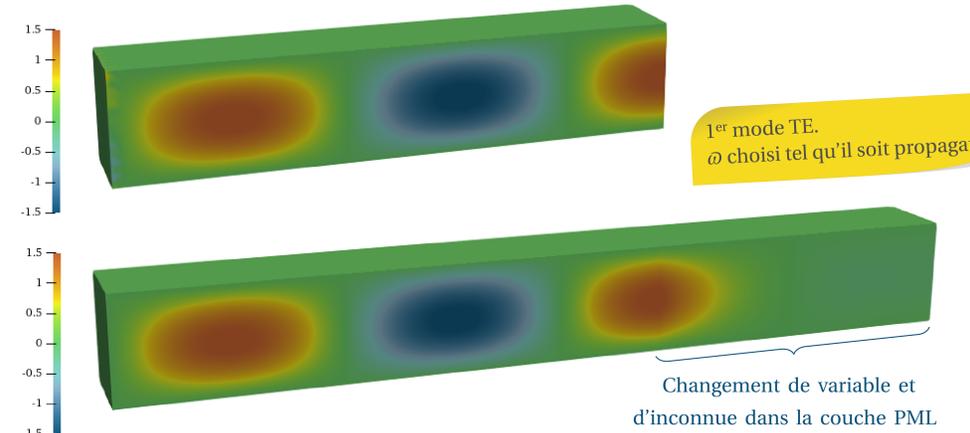


FIG. 2. Partie réelle de la composante E_y du champ électrique dans un guide parfait. En haut, utilisation de l'EtM, en bas couche PML à droite.

Diffraction d'une onde incidente par un obstacle :

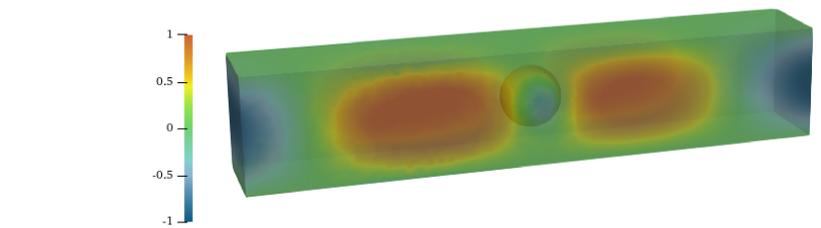


FIG. 3. Partie réelle de la composante E_y du champ électrique diffracté par un obstacle sphérique.

Si ω est tel qu'un seul mode est propagatif, alors on observe numériquement :

$$|R|^2 + |T|^2 \approx 1$$

$$\text{où } R = \int_{\Sigma_g} \mathbf{E}_s \cdot \bar{\Phi}_{1,TE}^\perp, \quad T = \int_{\Sigma_d} \mathbf{E} \cdot \bar{\Phi}_{1,TE}^\perp, \quad \text{avec } \Phi_{1,TE}^\perp \text{ l'unique mode propagatif.}$$

Perspectives

- Preuve de convergence pour la méthode éléments finis d'arêtes. (Justification de la courbe ci-contre.)

- Applications : invisibilité, réflexion nulle, convertisseur de modes...

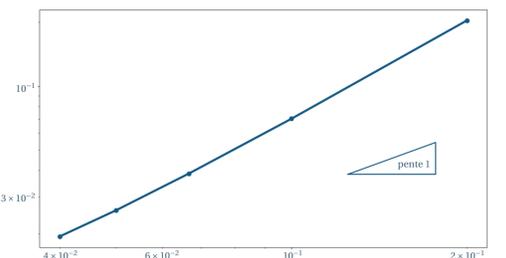
- Étude du cas stratifié : ε et μ sont indépendants de z , mais peuvent varier dans la section avec x et y .

Difficultés :

- Problème des modes transverses non autoadjoint.
- Existence possible de modes inverses (avec vitesse de groupe et de phase de signes opposés) \rightsquigarrow Les PMLs ne fonctionnent plus dans ce cas.
- Présence de blocs de Jordan à certaines fréquences.
- Perte d'orthogonalité \rightsquigarrow Relations de biorthogonalité.

Décomposition modale plus délicate à obtenir.

FIG. 4. Erreur relative en norme L^2 entre les solutions exacte et approchée, en fonction du pas du maillage.



Références

- Seungil KIM. « Analysis of the non-reflecting boundary condition for the time-harmonic electromagnetic wave propagation in waveguides ». In : *Journal of Mathematical Analysis and Applications* vol. 453.1 (2017), p. 82-103.
- Peter MONK. *Finite element methods for Maxwell's equations*. Oxford University Press, 2003.