Calcul intégral

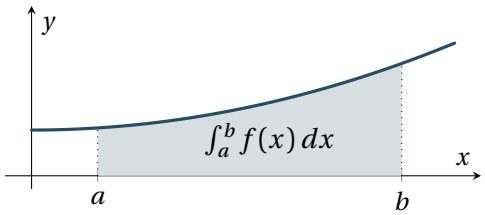
I Intégrale et théorème fondamental

f continue sur un intervalle I, $a,b \in$ I, F$'=f$:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = [\mathrm{F}(x)]_a^b = \mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)}.$$

$\mathrm{G}(x)=\int_a^x f(t)\,dt$: primitive de f vérifiant $\mathrm{G}(a)=0$. Variable d'intégration : muette.

II Aire et intégrale signée



$f \geqslant 0$: aire colorée $=\int_a^b f(x)\,dx$.

$a<b$, aires en unités d'aire :

$$f \geqslant 0 : \mathscr{A} = \int_a^b f, \qquad f \leqslant 0 : \mathscr{A} = -\int_a^b f.$$

Signe variable : couper aux zéros ; additionner les aires positives.
Entre deux courbes : si $f \geqslant g$,

$$\boxed{\mathscr{A} = \int_a^b (f-g)}.$$

Conversion : 1 u.a. = produit des unités des axes. L'intégrale peut être négative ; l'aire ne l'est jamais.

III Propriétés de calcul

Propriété	Formule
Bornes	$\int_a^a f = 0, \quad \int_b^a f = -\int_a^b f$
Chasles	$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$
Linéarité	$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$
Positivité, $a \leqslant b$	$f \geqslant 0 \Rightarrow \int_a^b f \geqslant 0$
Comparaison, $a \leqslant b$	$f \leqslant g \Rightarrow \int_a^b f \leqslant \int_a^b g$

IV Intégration par parties

u,v dérivables, u',v' continues :

$$\boxed{\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx}.$$

Choisir les facteurs → simplifier la seconde intégrale → évaluer le terme de bord.

V Valeur moyenne, encadrement et rectangles

$a<b$: $\boxed{m = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx}$. Même aire que le rectangle de largeur $b-a$, hauteur m, si $f \geqslant 0$.
$m_0 \leqslant f \leqslant \mathrm{M}_0$ sur $[a\,;b]$: $m_0(b-a) \leqslant \int_a^b f \leqslant \mathrm{M}_0(b-a)$.
Rectangles : subdivision en intervalles de largeur Δx_i, point ξ_i dans chacun :

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$