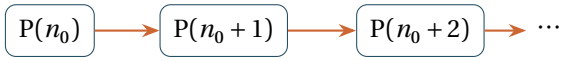
RÉCURRENCE ET SUITES

I Récurrence : trois étapes indispensables

But : démontrer une propriété $\mathrm{P}(n)$ pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Étape	À écrire / à établir
Initialisation	Vérifier $\mathrm{P}(n_0)$ au premier rang annoncé.
Hérédité	Fixer $k \geqslant n_0$. Supposer $\mathrm{P}(k)$ vraie (HR). Démontrer $\mathrm{P}(k+1)$.
Conclusion	Principe de récurrence : $\mathrm{P}(n)$ vraie pour tout $n \geqslant n_0$.



Initialisation : première propriété ; hérédité : chaque passage.

II Choisir la propriété et transmettre l'hypothèse

Objectif	Propriété / passage à préparer
Formule explicite	$\mathrm{P}(n) : u_n = g(n)$. Remplacer u_k dans la relation donnant u_{k+1}.
Monotonie	$\mathrm{P}(n) : u_{n+1} \geqslant u_n$. Au rang suivant : comparer u_{k+2} et u_{k+1}.
Borne / encadrement	$\mathrm{P}(n) : u_n \leqslant \mathrm{M}$ ou $m \leqslant u_n \leqslant \mathrm{M}$. Transmettre par la récurrence ; surveiller le sens des inégalités.
Somme	Isoler le dernier terme : $\sum_{i=1}^{k+1} a_i = \sum_{i=1}^{k} a_i + a_{k+1}$.

HR au rang k, résultat au rang $k+1$. Quelques vérifications ne prouvent pas l'hérédité.

III Suites : variations et bornes

À tout rang : $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$: croissante ; $\leqslant 0$: décroissante ; $= 0$: constante.
Monotone : croissante ou décroissante. Pour des termes > 0, comparer u_{n+1}/u_n à 1.

$$\text{Majorée : } \exists \mathrm{M} \in \mathbb{R},\ \forall n,\ u_n \leqslant \mathrm{M}, \qquad \text{minorée : } \exists m \in \mathbb{R},\ \forall n,\ u_n \geqslant m.$$

Bornée : majorée et minorée. Bornes fixes, indépendantes de n.

IV Sommes : compter les termes

De p à n : $\mathrm{N} = n - p + 1$ termes.

Somme	Formule
$1 + 2 + \cdots + n$	$n(n+1)/2$
Termes arithmétiques	$\sum_{k=p}^{n} u_k = \mathrm{N}(u_p + u_n)/2$
Termes géométriques, raison q	$\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p(1 - q^{\mathrm{N}})/(1-q)$ si $q \neq 1$; $\mathrm{N}u_p$ si $q = 1$.